Ueber Multiplicator-Gleichungen höherer Stufe im Gebiete der elliptischen Functionen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

an der

Universität Leipzig

vorgelegt

von

Paul Biedermann.

Greifswald.

Druck von F. W. Kunike.

1887.

Meiner lieben Mutter

in Dankbarkeit

gewidmet.

Ueber Multiplicator-Gleichungen höherer Stufe im Gebiete der elliptischen Functionen.

Wir verwenden im Folgenden durchweg die Bezeichnungen, welche Herr Klein in seinen neueren Arbeiten über elliptische Functionen und speciell elliptische Modulfunctionen benutzt. Man vergleiche dazu etwa Math. Ann. Band 14 und 17, sowie die Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von 1885. Es mag deshalb genügen, betreffs der hier eingehaltenen Bezeichnungsweise auf diese Arbeiten hingewiesen zu haben.

Das Problem der Transformation $n$ter Ordnung für die $s$te Stufe im Gebiete der elliptischen Functionen besteht in der Aufgabe, den algebraischen Zusammenhang zwischen einer ursprünglichen Modulform $F(\omega_1, \omega_2)$, welche entweder der $s$ten Stufe zugehört oder ihr adjungirt ist, und der Gesamtheit der transformirten Modulformen $F\left(\omega_1', \frac{\omega_2'}{n}\right)$ ausfindig zu machen. Dabei ist gesetzt

$$\omega_1' = (sa+1)\,\omega_1 + sb\,.\,\omega_2, \quad \omega_2' = sc\,.\,\omega_1 + (sd+1)\,\omega_2$$

unter der Bedingung

$$(sa+1)(sd+1) - sb\,.\,sc = 1,$$

und eine Modulform $F(\omega_1, \omega_2)$ heisst dann der $s$ten Stufe zugehörig, resp. ihr adjungirt, wenn sie bei jeder solchen mod s zur Identität congruenten linearen Substitution ungeändert bleibt, resp. sich nur um Einheitswurzeln ändert. Die Anzahl der oben auftretenden in Bezug auf die Untergruppe derjenigen linearen Substitutionen, welche

mod s zur Identität congruent sind, inäquivalenten Zahlenpaare $\omega_1', \frac{\omega_2'}{n}$ sei mit N bezeichnet.

Die algebraischen Gleichungen Nten Grades, welche den gewünschten algebraischen Zusammenhang liefern, zerfallen nun in der Jacobi'schen Darstellung, soweit Jacobi sie betrachtet, in zwei Classen, in Multiplicator- und Modular-Gleichungen. Bei seinen Multiplicator-Gleichungen ist die zu Grunde gelegte Modulform in Weierstrass'scher Bezeichnungsweise $F(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{e_i - e_k}$, also eine wirkliche Modulform; bei seinen Modular-Gleichungen ist sie speciell eine Modulfunction, nämlich $F(\omega_1, \omega_2) = F(1, \omega) = \sqrt[4]{k}$ [1]). Mit Bezug hierauf wollen wir überhaupt die bezeichneten algebraischen Gleichungen, welche ein System von transformirten Grössen mit nicht-transformirten Grössen verbinden, Multiplicator- resp. Modular-Gleichungen nennen, je nachdem es sich dabei um transformirte Modul-Formen, resp. Functionen handelt. In dem Sinne als die Modulfunctionen einen speciellen Fall der Modulformen repräsentiren, begreifen also auch die Multiplicator-Gleichungen die Modular-Gleichungen in sich.

Von eigentlichen Multiplicator-Gleichungen, also von solchen, bei denen eine wirkliche Modulform zu Grunde gelegt ist, finden sich ausser den Jacobi'schen in der Litteratur noch diejenigen vor, bei denen die Modulformen g_2, g_3 [2]) und $\sqrt[12]{\Delta}$ resp. $\sqrt[24]{\Delta}$ [3]) zu Grunde gelegt sind. Da diese Modulformen g_2, g_3, $\sqrt[24]{\Delta}$ der Gesamtgruppe der linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 zugehören, resp. ihr adjungirt sind, werden wir die diesbezüglichen Multiplicator-Gleichungen solche 1ter Stufe nennen. Da andrerseits die drei Modulformen $\sqrt{e_i - e_k}$ der Gruppe der linearen Substitutionen der Perioden, welche mod 2 zur Identität congruent sind, adjungirt sind, werden wir die

---

1) Man vergleiche für die Jacobi'schen Multiplicator- und Modular-Gleichungen insbesondere Joubert, „Sur les équations, qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques", Paris 1876 und Koenigsberger, „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen", sowie „Die Transformation, die Multiplication und die Modular-Gleichungen der elliptischen Functionen."

2) Man vergleiche Felix Müller, „De transformatione functionum ellipticarum" Berlin 1867.

3) Man vergleiche Klein, Math. Ann. Bd. 15, Kiepert, Crelle Bd. 87, Hurwitz, Math. Ann. Bd. 18, Weber, Acta mathematica Bd. 6.

Jacobi'schen Multiplicator-Gleichungen als solche 2ter Stufe bezeichnen.

Dies vorausgeschickt liegt es nahe, auch Multiplicator-Gleichungen höherer Stufe zu studiren, indem man fundamentale Modulformen höherer Stufe für die Transformation zu Grunde legt. Als solche empfehlen sich die Teilwerte der σ-Function:

$$\sigma_{\lambda\mu} = -e^{-\frac{(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)}{2s^2}}\,\sigma\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{s},\ \omega_1,\ \omega_2\right)^{1)}$$

Es gelingt für sie einerseits, eine Theorie der Multiplicator-Gleichungen bei beliebigem s zu entwerfen, d. h. man kann für sie Multiplicator-Gleichungen beliebiger Stufe studiren. Andrerseits ist es möglich, überhaupt alle Multiplicator-Gleichungen, Modular-Gleichungen, Modular-Correspondenzen lediglich von den $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgehend zu behandeln. Es hat dies seinen Grund darin, dass die $\sigma_{\lambda\mu}$ in der Tat Modulformen von fundamentalster Bedeutung sind.

Wir beschränken uns auf die Multiplicator-Gleichungen im engeren Sinne und zwar werden wir in einem ersten Abschnitte die Multiplicator-Gleichungen der Teilwerte der σ-Function bei beliebigem s in den allgemeinen Umrissen studiren, um sodann im zweiten Abschnitt die Untersuchung für die niedersten Stufen bis in das Einzelne durchzuführen.

Erster Abschnitt.

Allgemeines über die Multiplicator-Gleichungen für die Teilwerte der σ-Function.

§ 1. *Die Teilwerte der σ-Function.*

Die Haupt-Eigenschaften der $\sigma_{\lambda\mu}$ sind in den beiden eben citirten Abhandlungen des Herrn Klein bereits abgeleitet worden. Wir stellen davon für unsere Zwecke folgendes zusammen:

Die beiden Grössen λ und μ können an sich beliebige ganze Zahlen sein; doch giebt es bei gegebenem s nur eine begrenzte Anzahl ν verschiedener $\sigma_{\lambda\mu}$, da die Relationen bestehen:

---

1) Man vergleiche Klein, Berichte d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1884, sowie die Abhandlungen derselben von 1885.

$$(1) \qquad \sigma_{\lambda+ls,\,\mu+ms} = (-1)^{lm+l+m}\, e^{-\frac{i\pi}{s}(\lambda m-\mu l)}\, \sigma_{\lambda\mu},$$

$$(2) \qquad e^{(\lambda-\mu)\frac{i\pi}{s}}\, \sigma_{\lambda\mu} = \sigma_{s-\lambda,\,s-\mu}.$$

Bei zusammengesetztem s ist ausserdem noch zu beachten, dass eine gewisse Anzahl von $\sigma_{\lambda\mu}$ als bereits zu den Factoren von s gehörig auszuscheiden sind. Wenn

$$s = t_1^{s_1} t_2^{s_2} t_3^{s_3} \ldots$$

gesetzt wird, so dass

$$S = s^3\left(1-\frac{1}{t_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{t_2^2}\right)\left(1-\frac{1}{t_3^2}\right)\ldots$$

die Anzahl der mod s incongruenten homogenen linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 bezeichnet, so zählt man für dieses ν ab:

$$(3) \qquad \begin{cases} \nu = \dfrac{S}{s} = 3 \text{ für } s = 2 \\ \text{und} \\ \nu = \dfrac{S}{2s} = \dfrac{s^2}{2}\left(1-\dfrac{1}{t_1^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{t_2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{t_3^2}\right)\ldots \text{ für } s > 2\,^{1}) \end{cases}$$

Das Verhalten der $\sigma_{\lambda\mu}$ bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2:

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

anlangend gilt die Formel:

$$(4) \qquad \sigma_{\lambda\mu}(\omega_1', \omega_2') = \sigma_{\lambda\alpha+\mu\gamma,\ \lambda\beta+\mu\delta}(\omega_1, \omega_2).$$

Dies besagt unter Bezugnahme auf (1) und (2), dass die einem bestimmten s zugehörigen verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ sich bei linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 bis auf vortretende $2s$ te Einheitswurzeln unter sich permutiren. Es lassen sich daher durch lineare Substitution der Perioden aus irgend einem $\sigma_{\lambda\mu}$ die sämtlichen ν demselben s zugehörigen $\sigma_{\lambda\mu}$ und nur diese ableiten.

Ueben wir weiter insbesondere auf ω_1, ω_2 eine lineare Substitution aus, welche mod s zur Identität congruent ist, also eine Substitution:

---

1) Dieselbe Zahl hat neuerdings auch Herr Kiepert angegeben, indem er die Anzahl der reducirten Teilwerte $n$ten Grades der p-Function bestimmt. Man vergleiche Math. Ann., Bd. 26, pag. 378.

(5) $\omega_1' = (sa+1)\,\omega_1 + sb\,\omega_2, \quad \omega_2' = sc\,\omega_1 + (sd+1)\,\omega_2$

wobei

(6) $(sa+1)(sd+1) - sb \cdot sc = 1$

st, so findet sich auf Grund von (4) und (1)

$$(7)\quad \sigma_{\lambda\mu}(\omega'_1, \omega_2') = (-1)^{\lambda^2(ab+a+b)+\mu^2(cd+c+d)+\lambda\mu(ad+bc)} \times e^{\frac{i\pi}{s}[-b\lambda^2+(a-d)\lambda\mu+c\mu^2]}\, \sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2)$$

Speciell für ungerades s lässt sich (7) noch zusammenziehen. (6) hat dann nämlich die Relationen zur Folge:

$$ab+a \equiv cd+d \equiv 0, \quad ad+bc \equiv a-d \pmod 2$$

und demgemäss lässt sich in diesem Falle für (7) schreiben:

$$(7^b)\quad \sigma_{\lambda\mu}(\omega_1', \omega_2') = \varepsilon^{\frac{s-1}{2}[b\lambda^2-(a-d)\lambda\mu-c\mu^2]}\, \sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2),$$

wobei $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{s}}$ gesetzt ist. Diese Formeln (7) und (7^b) lehren, dass sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod s zur Identität congruent sind, um $2s$te resp. $s$te Einheitswurzeln ändert, je nachdem s gerade, resp. ungerade ist. Jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ bleibt aber auch erst bei Substitutionen, welche mod s zur Identität congruent sind, bis auf Einheitswurzeln ungeändert. Die Modulformen $\sigma_{\lambda\mu}$ sind somit der $s$ten Stufe adjungirt.

Ersetzt man in (5) und (6) a, b, c, d durch $2sa'$, $2sb'$, $2sc'$, $2sd'$, resp. sa', sb', sc', sd', je nachdem s gerade oder ungerade ist (was man im Folgenden immer mit Leichtigkeit ergänzen wird), so entsteht eine lineare Substitution der Perioden, welche mod $2s^2$, resp. mod s^2 zur Identität congruent ist. Wir bemerken infolge von (7) und (7^b) ohne weiteres, dass dann jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ ungeändert bleibt. Andrerseits bleibt aber auch das einzelne $\sigma_{\lambda\mu}$ erst bei Substitutionen, welche mod $2s^2$, resp. mod s^2 zur Identität congruent sind, ungeändert, und nicht etwa schon bei Substitutionen, welche mod t zur Identität congruent sind, wo $t < 2s^2$, resp. $t < s^2$ ist. Die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind daher Modulformen von der Stufe $2s^2$, resp. s^2.

Für alles Folgende ist das Verhalten der $\sigma_{\lambda\mu}$ bei linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 von fundamentaler Wichtigkeit. Wir bemerken daher in dieser Richtung noch speciell Folgendes:

1) Liegen allgemein zwei lineare Substitutionen U und V (in symbolischer Bezeichnung) der Perioden vor, welche mod ϱ unter sich congruent sind, so lässt sich jede von beiden aus der andern durch eine lineare Substitution W der Perioden herstellen, welche mod ϱ zur Identität congruent ist. In der Tat folgt aus

$$UW = V, \quad W = U^{-1}V,$$

d. h. mit Rücksicht auf $U \equiv V \bmod \varrho$

$$W \equiv 1 \bmod \varrho.$$

Wenden wir diesen Satz auf unsere $\sigma_{\lambda\mu}$ an, so zeigt dies, dass zwei lineare Substitutionen der Perioden, welche mod $2s^2$, resp. mod s^2 unter sich congruent sind, auf ein $\sigma_{\lambda\mu}$ dieselbe Aenderung hervorbringen.

2) Ausser den betrachteten linearen Substitutionen, welche mod s und mod $2s^2$, resp. mod s^2 zur Identität congruent sind, interessiren noch die zwischenliegenden mod (ms) zur Identität congruenten linearen Substitutionen, unter m einen Teiler von s verstanden. Man überzeugt sich auf Grund des pag. 5 angegebenen unmittelbar, dass eine solche lineare Substitution jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ um eine $\frac{2s}{m}$te, resp. $\frac{s}{m}$te Einheitswurzel ändert. Dieser Satz schliesst die pag. 5 entwickelten Sätze als specielle Fälle ein.

3) Schliesslich bemerken wir, dass die Coefficienten einer linearen Substitution der Perioden beliebig mod $2s^2$ modificirt werden dürfen, ohne den Einfluss derselben auf ein $\sigma_{\lambda\mu}$ zu beeinträchtigen, gleichviel ob die Substitutions-Determinante dabei gleich 1 bleibt, oder ob sie nur $\equiv 1 \bmod 2s^2$ wird. Das Bemerkenswerte daran liegt darin, dass man auch für ungerades s die Substitutions-Coefficienten nur mod $2s^2$ modificiren darf, wenn man keine Rücksicht auf den Wert der Substitutions-Determinante nimmt. In der Tat ist, wenn man

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

setzt, bei ungeradem s

$$\sigma_{\lambda\mu}\{(\alpha + As^2)\,\omega_1 + (\beta + Bs^2)\,\omega_2,\ (\gamma + Cs^2)\,\omega_1 + (\delta + Ds^2)\,\omega_2\}$$
$$= (-1)^{(\lambda A+\mu C)(\lambda B+\mu D)+(\lambda A+\mu C)+(\lambda B+\mu D)+\lambda(\lambda B+\mu D)+\mu(\lambda A+\mu C)}$$
$$\cdot\, \sigma_{\lambda\alpha+\mu\gamma,\ \lambda\beta+\mu\delta} = \pm\, \sigma_{\lambda\alpha+\mu\gamma,\ \lambda\beta+\mu\delta}$$

und also erst

$$\sigma_{\lambda\mu}\{(\alpha + A2s^2)\,\omega_1 + (\beta + B2s^2)\,\omega_2,\ (\gamma + C2s^2)\,\omega_1 + (\delta + D2s^2)\,\omega_2\}$$
$$= +\,\sigma_{\lambda\mu}\{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\ \gamma\omega_1 + \delta\omega_2\}.$$

§ 2. *Transformation nter Ordnung. Wahl der Repräsentanten, die Funetionen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$.*

Nachdem wir über die $\sigma_{\lambda\mu}$ orientirt sind, lassen wir nunmehr Transformation $n$ter Ordnung eintreten, wobei n immer relativ prim zu s vorausgesetzt wird. Es heisst dies, wir ersetzen die ursprünglichen Perioden ω_1, ω_2 durch alle möglichen Zahlenpaare

$$(8)\quad \overline{\omega}_1^{(i)} = \alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2, \quad \overline{\omega}_2^{(i)} = \frac{\gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2}{n}, \quad \alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = 1,$$

welche so beschaffen sind, dass niemals je zwei dieser Zahlenpaare äquivalent, d. h. durch eine lineare Substitution

$$\omega_1^{(j)} = \lambda\overline{\omega}_1^{(i)} + \mu\overline{\omega}_2^{(i)}, \quad \overline{\omega}_2^{(j)}{}_1 = \nu\overline{\omega}_1^{(i)} + \varrho\overline{\omega}_2^{(i)}, \quad \lambda\varrho - \mu\nu = 1$$

mit einander verbunden sind.

Soll zuvörderst das einfachste transformirte Periodenpaar ω_1, $\frac{\omega_2}{n}$ mit

$$\alpha\omega_1 + n\beta\frac{\omega_2}{n}, \quad \frac{\gamma}{n}\omega_1 + \delta\frac{\omega_2}{n}, \quad \alpha\delta - n\beta\frac{\gamma}{n} = 1$$

äquivalent sein, so ist offenbar dazu notwendig und hinreichend

$$(9)\qquad \gamma \equiv 0 \pmod{n}.$$

Dieselbe Betrachtung und dasselbe Resultat gilt, wenn in dieser kleinen Betrachtung ω_1 und ω_2 selbst wieder linear substituirt werden, wenn also

$$\mathfrak{a}\omega_1 + \mathfrak{b}\omega_2, \quad \frac{\mathfrak{c}\omega_1 + \mathfrak{d}\omega_2}{n}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1$$

mit

$$\alpha(\mathfrak{a}\omega_1 + \mathfrak{b}\omega_2) + \beta(\mathfrak{c}\omega_1 + \mathfrak{d}\omega_2), \quad \frac{\gamma(\omega_1 + \mathfrak{c}\omega_2) + \delta(\omega\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{d}\omega_2)}{n}$$

äquivalent sein soll. Deuten wir, wie dies bereits pag. 6. geschah, symbolisch durch P, Q, U, V je eine lineare Substitution der ursprünglichen Perioden ω_1, ω_2 an, also

$$P \qquad \mathfrak{a}\omega_1 + \mathfrak{b}\omega_2, \quad \mathfrak{c}\omega_1 + \mathfrak{d}\omega_2, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1$$

ferner durch $P^{(u)}$, $Q^{(u)}$ das daraus gebildete transformirte Periodendaar, also

$$P^{(n)} \qquad \mathfrak{a}\omega_1 + \mathfrak{b}\omega_2, \quad \frac{\mathfrak{c}\omega_1 + \mathfrak{d}\omega_2}{n}$$

und schreiben nach einander auszuführende Operationen in der Reihenfolge von links nach rechts, so liegt in dem Bemerkten folgender

Satz: Damit zwei transformirte Periodenpaare $P^{(n)}$ und $Q^{(n)}$ äquivalent sind, damit also

$$P^{(n)} = Q^{(n)} V$$

sei, ist notwendig und hinreichend, dass in

$$P = Q U$$

die lineare Substitution $U = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$ die Bedingung (9) erfüllt. Und zwar ist dann

$$V = (\alpha, n\beta, \frac{\gamma}{n}, \delta). \tag{10}$$

Als Index N (man vergleiche pag. 2.) der Untergruppe (9) in Bezug auf die Gesamtgruppe der linearen Substitutionen ergibt die Abzählung, wenn sich n in Primfactoren schreibt:

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \ldots$$

$$N = n\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\left(1+\frac{1}{p_3}\right)\ldots$$

Die unendliche Zahl von Periodenpaaren

$$a\omega_2 + b\omega_2, \quad \frac{c\omega_1 + d\omega_2}{n}, \quad ad - bc = 1$$

zerfällt also in N Classen, welche so beschaffen sind, dass Periodenpaare derselben Classe äquivalent sind, und das Periodenpaare verschiedener Classen inäquivalent sind. Irgend welche N Periodenpaare aus je einer dieser N Classen geben daher ein vollständiges System von transformirten Periodenpaaren ab, oder bilden ein vollständiges „Repräsentantensystem" der genannten N Classen. Die noch vorhandene Willkür in der Auswahl der Repräsentanten aus jeder Classe wird man benutzen, um das Repräsentantensystem von vorn herein so zweckmässig als möglich zu gestalten. Da wir die $c_{\lambda\mu}$ transformiren wollen, welche von der Stufe $2s^2$, resp. s^2 sind, erscheint es als angemessen, jedem Repräsentanten eine Bedingung $\bmod 2s^2$, resp. $\bmod s^2$ aufzuerlegen. Es ist dies zulässig, da die einzige die völlig willkürliche Auswahl der Repräsentanten beschränkende Bedingung (9) eine Congruenz $\bmod n$ ist, beide Bedingungen also verträglich sind, indem n und s relativ prim sind[1]). Am einfachsten ist es, die Repräsentanten

$$\bar{\omega}_1^{(i)} = \alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2, \quad \bar{\omega}_2^{(i)} = \frac{\gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2}{n}, \tag{8}$$

1) Das allgemeine diesbez. gruppentheoretische Princip findet man bei Klein, Math. Ann. Bd. 17., pag. 67.

$$\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots N$$

so zu wählen, dass die Grössen

$$\alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2, \quad \gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2$$

mod $2s^2$, resp. mod s^2 zur Identität congruent sind. Wir setzen also

$$\overline{\omega}_1^{(i)} = (2s^2 a_i' + 1)\omega_1 + 2s^2 b_i' \omega_2, \quad \overline{\omega}_2^{(i)} = \frac{2s^2 c_i' \omega_1 + (2s^2 d_i' + 1)\omega_2}{n},$$

resp.

$$\overline{\omega}_1^{(i)} = (s^2 a_i' + 1)\omega_1 + s^2 b_i' \omega_2, \quad \overline{\omega}_2^{(i)} = \frac{s^2 c_i' \omega_1 + (s^2 d_i' + 1)\omega_2}{n}.$$

Es wird sich zeigen, dass unter dieser Voraussetzung die Grössen

$$z_{\lambda\mu}^{(i)} = \sigma_{\lambda\mu}\{\overline{\omega}_1^{(i)}, \ \overline{\omega}_2^{(i)}\}, \quad i = 1, 2, \ldots N \tag{11}$$

direct ohne vortretende Einheitswurzeln die Wurzeln der zu betrachtenden Multiplicator-Gleichungen sind. Um späterhin in den Fällen der 2ten bis 5ten Stufe einfach mit den Hauptmoduln und für die höheren Stufen mit vollen Systemen von Modulfunctionen operiren zu können, und nicht mit vollen Systemen von Modulformen operiren zu müssen, werden wir die $z_{\lambda\mu}^{(i)}$ durch eine nicht-transformirte Modulform als Zusatzfactor in Modulfunctionen überführen und als Wurzeln unserer Gleichungen zu Grunde legen:

$$x_{\lambda\mu}^{(i)} = \frac{z_{\lambda\mu}^{(i)}}{\sigma_{\lambda\mu}} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}\{\overline{\omega}_1^{(i)}, \ \overline{\omega}_2^{(i)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}}, \quad i = 1, 2, \ldots N. \tag{11^b}$$

Dadurch wird der Charakter unserer Gleichungen als Multiplicator-Gleichungen in keiner Weise geändert.

Die benutzten Repräsentanten (8) erweisen sich jedoch als ungeeignet, wenn es gilt, die $x_{\lambda\mu}$ functionentheoretisch zu discutiren, denn das zugehörige q ist

$$q = e^{ix \frac{1}{n} \frac{\gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2}{\alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2}}$$

und somit vermitteln jene Repräsentanten keine Reihen- und Product-Entwicklungen nach q. Dies leistet das folgende, schon von Jacobi benutzte vollständige Repräsentantensystem

$$\frac{a_i \omega_1}{n}, \quad \frac{c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots N \tag{12}$$

worin

$$a_i d_i = n, \quad c_i < a_i$$

ist, und a_i, c_i, d_i nicht-negative ganze Zahlen ohne einen allen dreien gemeinsamen Teiler sind. Nach dem pag. 7) und 8) Bemerkten ist jeder der N Repräsentanten (11) aus dem entsprechenden, mit gleichem Index versehenen Repräsentanten (12) und nur aus diesem durch eine lineare Substitution A_i, B_i, C_i, D_i, $A_i D_i - B_i C_i = 1$, ableitbar. D. h. es bestehen die Relationen:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{\omega}_1^{(i)} = A_i \dfrac{a_i\omega_1}{n} + B_i \dfrac{c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n} \\ \\ \overline{\omega}_2^{(i)} = C_i \dfrac{a_i\omega_1}{n} + D \dfrac{c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n} \end{array}\right. \qquad A_i D_i - B_i C_i = 1$$

Bestimmen wir diese N linearen Substitutionen und deren Einfluss auf die $\sigma_{\lambda\mu}$, so können wir die Wurzeln $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ unter Berücksichtigung der vortretenden $2s$ten Einheitswurzeln $E_{\lambda\mu}^{(i)}$ in den Repräsentanten (12) schreiben, was beabsichtigt wurde. So ergiebt sich:

$$(13)\quad x_{\lambda\mu}^{(i)} = E_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\sigma_{\lambda'\mu'}\left\{\dfrac{a_i\omega_1}{n}, \dfrac{a_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}}$$

Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass im allgemeinen nicht für jedes i

$$\lambda' = \lambda, \quad \mu' = \mu$$

sein wird. In den Fällen $s = 2, 3, 4$ lässt sich dies jedoch erreichen, wenn c_i in (12) etwas modificirt wird [1]). Benutzen wir aus diesem Grunde an Stelle von (12) das Repräsentantensystem

$$(12^b)\qquad \frac{a_i\omega_1}{n}, \quad \frac{2s^2c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}, \quad \text{resp.} \quad \frac{a_i\omega_1}{n}, \quad \frac{s^2c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n},$$

wobei a_i, c_i, d_i den alten unter (12) angegebenen Bedingungen genügen, so wird die Ausführung der angedeuteten Schritte im Einzelnen folgende.

---

1) Dieser Umstand, dass beim Uebergang vom Repräsentantensystem (8) zum Repräsentantensystem (12) eine zu transformirende Modulform oder Modulfunction 2ter und höherer Stufe nicht ausnahmslos erhalten bleibt, sondern zum Teil durch die andern gleichberechtigten Modulformen und Modulfunctionen derselben Stufe ersetzt wird, ist schliesslich wol der Grund, aus dem in der Litteratur gewöhnlich nicht am Repräsentantensystem (12) festgehalten wird. So benutzt beispielsweise Koenigsberger nach dem Vorgange von Hermite:

$$\frac{a_i\omega_1}{n}, \quad \frac{16c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}, \quad a_i d_i = n, \quad c_i < a_i.$$

Wir setzen an:

$$\left\{\begin{array}{l} (2s^2 a_i' + 1)\omega_1 + 2s^2 b_i' \omega_2 = A_i \dfrac{a_i \omega_1}{n} + B_i \dfrac{2s^2 c_2 \omega_1 + d_i \omega_2}{n} \\ \dfrac{2s^2 c_i' \omega_1 + (2s^2 d_i' + 1)\omega_2}{n} = C_i \dfrac{a_i \omega_1}{n} + D_i \dfrac{2s^2 c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n} \end{array}\right.$$

(13) resp.

$$\left\{\begin{array}{l} (s^2 a_i' + 1)\omega_1 + s^2 b_i' \omega_2 = A_i \dfrac{a_i \omega_1}{n} + B_i \dfrac{s^2 c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n} \\ \dfrac{s^2 c_i' \omega_1 + (s^2 d_i' + 1)\omega_2}{n} = C_i \dfrac{a_i \omega_1}{n} + D_i \dfrac{s^2 c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n} \end{array}\right.$$

Dies führt nach ω_1, ω_2 getrennt zu:

$$\left\{\begin{array}{l} n(2s^2 a_i' + 1) = A_i a_i + B_i 2s^2 c_i, \quad n 2s^2 b_i' = B_i d_i \\ 2s^2 c_i' = C_i a_i + D_i 2s^2 c_i, \quad 2s^2 d_i' + 1 = D_i d_i \end{array}\right.$$

resp.

$$\left\{\begin{array}{l} n(s^2 a_i' + 1) = A_i a_i + B_i s^2 c_i, \quad n s^2 b_i' = B_i d_i \\ s^2 c_i' = C_i a_i + D_i s^2 c_i, \quad s^2 d_i' + 1 = D_i d_i \end{array}\right.$$

und deren Auflösung nach A_i, B_i, C_i, D_i mod $2s^2$, resp. mod s^2 ergiebt:

(14) $A_i \equiv d_i$, $B_i \equiv 0$, $C_i \equiv 0$, $D_i \equiv d_i^{-1}$ mod $2s^2$. resp. mod s^2.

Darin ist $D_i \equiv d_i$ durch $D_i d_i \equiv 1$ definirt und für ungerades s ist nach pag. 6) Nr. 3) die Substitutions-Determinante $(A_i D_i - B_i C_i$ durch Modification der Substitutions-Coefficienten mod s^2 gleich 1 zu machen. Somit kommt, wenn wir die neuen Repräsentanten in (11) einführen:

$$z\lambda_{\mu'} = \sigma_{\lambda\mu} \left\{ A_i \frac{a_i \omega_1}{n} + B_i \frac{2s^2 c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n}, \quad C_i \frac{a_i \omega_1}{n} + D_i \frac{2s^2 c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n} \right\}$$

$$= \sigma_{\lambda A_i + \mu B_i, \quad \lambda C_i + \mu D_i} \left\{ \frac{a_i \omega_1}{n}, \frac{2s^2 c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n} \right\}$$

d. h.

(15) $$z\lambda_{\mu^{(i)}} = \sigma_{\lambda d_i, \quad \mu d_i^{-1}} \left\{ \frac{a_i \omega_1}{n}, \frac{2s^2 c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n} \right\}$$

resp.

$$= \sigma_{\lambda A_i + \mu C_i, \quad \lambda B_i + \mu D_i} \left\{ \frac{a_i \omega_1}{n}, \frac{s^2 c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n} \right\}$$

und folglich

$$(15\,b)\quad x_{\lambda\mu}^{(i)} = \frac{\sigma_{\lambda d_i,\ \mu d_i - 1}\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{2s^2 c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}}$$

$$= E_{\lambda\mu}^{(i)}\,\frac{\sigma_{\lambda'\mu'}\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{2s^2 c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}}$$

resp.

$$\frac{\sigma_{\lambda A_i + \mu C_i,\ \lambda B_i + \mu D_i}\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{s^2 c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{v}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}}$$

$$= E_{\lambda\mu}^{(i)}\,\frac{\sigma_{\lambda'\mu'}\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{s^2 c_i'\omega_1 + d_i\omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}}$$

§ 4. *Verhalten der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2.*

Für die jetzt anzustellende gruppentheoretische Betrachtung benutzen wir die schon pag. 6. erklärte Symbolik und schreiben die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ folgendermassen:

$$x_{\lambda\mu}^{(i)} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}\{\overline{\omega}_1^{(i)},\ \overline{\omega}_2^{(i)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}\{R_i^{(n)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}(1)}$$

Die Ausübung einer linearen Substitution P der Perioden ω_1, ω_2 führt dies in

$$(x_{\lambda\mu}^{(i)})' = \frac{\sigma_{\lambda\mu}\{(R_i P)^{(n)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}(P)}$$

über. Die Auswertung des Nenners dieses Bruches erledigt sich direct nach der Formel (4); es ist aber noch der Zähler zu behandeln.

Da die $R_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots N$, ein volles System von Repräsentanten bilden, ist $(R_i P)^{(n)}$ bis auf eine durch die Formel (10) definirte lineare Substitution V_i mit einem andern der N Repräsentanten $R_i^{(n)}$ identisch; es ist also:

$$(16)\qquad (R_i P)^{(n)} = R_j^{(n)}\, V_i,$$

worin j wie i ebenfalls von 1 bis N läuft, abgesehen von der Reihenfolge, welche für das Folgende gleichgiltig ist. Diese Gleichung formen wir um in

$$(R_i P)^{(n)} = (R_j U_i)^{(n)},$$

worin U_i die jedem V_i in der pag. 8. angegebenen Weise eindeutig zugeordnete lineare Substitution ist, und daraus folgt:

(16b) $$R_i P = R_j U_i.$$

Da infolge der von uns getroffenen Repräsentantenwahl

$$R_i \equiv R_j \mod 2s^2, \text{ resp. } \mod s^2$$

ist, erfahren wir aus (16b), dass

(17) $$U_i \equiv P \mod 2s^2, \text{ resp. } \mod s^2$$

ist. D. h. zunächst, alle U_i sind $\mod 2s^2$, resp. $\mod s^2$ unter sich congruent. Dann sind aber auch sämtliche $V_i \mod 2s^2$, resp. $\mod s^2$ unter sich congruent und solche Substitutionen bringen auf ein $\sigma_{\lambda\mu}$ angewendet dieselbe Aenderung hervor. Die Aenderung des Zählers jedes der N $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ besteht demgemäss nach (16) einfach darin, dass auf alle N verschiedene transformirte Periodenpaare ein und dieselbe durch Combination von (17) und (10) zu bestimmende lineare Substitution V_i auszuüben ist. Schreiben wir die vorgegebene lineare Substitution $P = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1)$ in der Form

(18) $$P \equiv (\alpha, \beta, n\gamma, \delta) \mod 2s^2, \text{ resp. } \mod s^2,$$
$$\alpha\delta - \beta n\gamma \equiv 1 \mod 2s^2, \text{ resp. } = 1,$$

wodurch $\sigma_{\lambda\mu}$ in $\sigma_{\lambda\alpha+\mu n\gamma,\ n\beta+\mu\delta}$ übergeht, so wird

$$V_i \equiv (\alpha, n\beta, \gamma, \delta) \mod 2s^2, \text{ resp. } \mod s^2$$

und diese verwandelt $\sigma_{\lambda\mu}$ in $\sigma_{\lambda\alpha+\mu\gamma,\ \lambda n\beta+\mu\delta}$. Damit haben wir folgendes Resultat gewonnen: Um die $(x_{\lambda\mu}^{(i)})'$ zu bestimmen, in welche eine lineare Substitution von ω_1, ω_2 die N $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ überführt, bringe man P auf die Form (18); dann ist:

(19) $$(x_{\lambda\mu}^{(i)})' = \frac{\sigma_{\lambda\alpha+\mu\gamma,\ \lambda n\beta+\mu\delta}\{\overline{\omega}_1^{(i)},\ \overline{\omega}_2^{(j)}\}}{\sigma_{\lambda\alpha+\mu n\gamma,\ \lambda\beta+\mu\gamma}(\omega_1,\ \omega_2)} = E_{\lambda\mu}^{(i)} x_{lm}^{(j)} \frac{\sigma_{lm}}{\sigma_{l'm'}},$$

worin j mit i, von der Reihenfolge abgesehen, von 1 bis N läuft. Es geht also ein System von N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bis auf eine vortretende Einheitswurzel und einen Factor $\frac{\sigma_{lm}}{\sigma_{l,m'}}$ in eins der ν Systeme von N Grössen $x_{lm}^{(i)}$ über. Darin liegt folgende wichtige Eigenschaft der Multiplicator-Gleichungen für die $\sigma_{\lambda\mu}$ begründet. Die den ν verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ entsprechenden ν simultanen Multiplicator-Gleichungen sind von einem höheren Standpunkte aus nicht wesentlich von einander verschieden, sondern ebenso wie sich aus einem $\sigma_{\lambda\mu}$ alle anderen durch lineare Substitutionen der Perioden ergeben, lassen sich aus einer dieser ν Gleichungen die sämtlichen

anderen durch lineare Substitution der Perioden ω_1, ω_2 ableiten. Von demselben höheren Standpunkte aus, von dem es nur ein $\sigma_{\lambda\mu}$ giebt, existirt also auch nur eine Multiplicator-Gleichung der betrachteten Art, welche aber wie ein $\sigma_{\lambda\mu}$ ν gleichberechtigte Formen annehmen kann.

Es ist evident, dass der Satz überhaupt für alle Multiplicator-Gleichungen 2ter und höherer Stufe gilt, und das Interessante daran liegt im wesentlichen nur in der einfachen (hier durch die Formel (19) markirten) Art und Weise, wie man diesen Uebergang von irgend einer der Gleichungen zu den übrigen simultanen bewerkstelligen kann.[1])

§ 4. *Stufe einer Multiplicator- oder Modular-Gleichung. Existenz der Multiplicator-Gleichungen für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$.*

Im Anschluss an die bereits eingangs gebrauchte Benennung der Multiplicator-Gleichungen für $\sqrt[12]{\Delta}$, g_2, g_3 als solcher erster Stufe und der Jacobi'schen Multiplicator-Gleichungen als solcher zweiter Stufe (man vergleiche pag. 2) wird es sich empfehlen, allgemein folgende Definition der Stufe einer Multiplicator-Gleichung (und damit auch einer Modular-Gleichung) zu geben: Wir bezeichnen eine solche Gleichung als eine solche $t$ter Stufe, wenn die zu Grunde gelegte Modulform (oder Modulfunction) der $t$ten Stufe adjungirt ist oder zugehört, unter t die kleinst-mögliche Zahl verstanden.[2])

Da die $\sigma_{\lambda\mu}$ der $s$ten Stufe adjungirt sind, sind die Multiplicator-Gleichungen für die $z_{\lambda\mu}^{(i)}$, resp. $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ von der $s$ten Stufe.

Geeignete Combinationen der ν zu einem s gehörigen verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ sind sichtlich schon einer Stufe t adjungirt, wo t irgend ein Teiler von s ist. Legen wir derartige Combinationen zu Grunde, so erhalten wir also Multiplicator-Gleichungen resp. Modular-Gleichungen von einer Stufe, die irgend ein Teiler von s ist. Z. B. ist das

---

1) Betreffs der drei simultanen Jacobi'schen Multiplicator-Gleichungen, welche den Modulformen $\sqrt{e_1 - e_2}$, $\sqrt{e_2 - e_3}$, $\sqrt{e_3 - e_1}$ entsprechend existiren, ist in der Litteratur gewöhnlich nur von der letzteren die Rede.

2) Hiermit weiche ich von der Darstellung in meiner Note in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. von 1885 ab. Die jetzt zu Grunde gelegte Definition dürfte wesentlich dazu beitragen, die Darstellung einheitlicher zu gestalten; man vergleiche diesbezüglich etwa die beiderseitige Darstellung des speciellen Falles $s = 2$.

Product der ν verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ der Gesamtgruppe der linearen Substitutionen adjungirt; diese Combination führt sonach auf Multiplicator-Gleichungen erster Stufe. Zwischen diese beiden extremen Fälle der Multiplicator-Gleichungen erster und $s$ter Stufe schalten sich weiter Multiplicator-Gleichungen von Stufen ein, welche den Teilern von s entsprechen.

Da wir im Vorausgehenden allgemein die Gesamtgruppe der linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 in Betracht gezogen haben und nach den Formeln (19), (1), (2) das Verhalten der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bei beliebigen linearen Substitutionen dieser Gesamtgruppe kennen, sind wir in den Stand gesetzt, den verschiedenen Congruenz-Untergruppen der Gesamtgruppe entsprechend, nunmehr die Existenz aller dieser Multiplicator- und Modular-Gleichungen der verschiedenen Stufen für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ und ihre Combinationen zu erschliessen. Dies will sagen, wir können die Stufe der Coefficienten dieser Gleichungen angeben. Dabei sind diese Coefficienten stets rationale Functionen des vollen Modul-Systems der betreffenden Stufe, da die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ algebraisch von demselben abhangen.[1])

Uns interessiren hier vorzugsweise die Multiplicator-Gleichungen $s$ter Stufe für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ selbst; wir behaupten, für sie gilt in der bezeichneten Richtung folgender Satz: Je N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots N$, genügen einer Gleichung Nten Grades, deren Coefficienten der $s$ten Stufe adjungirt sind und zwar in Bezug auf $s$te Einheitswurzeln.

Um dies zu beweisen, wenden wir auf ein System von $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots N$, irgend eine lineare Substitution an, welche mod s zur Identität congruent ist, also:

$$P = (sa+1,\ sb,\ sc,\ sb+1),\quad (sa+1)(sb+1) - sb\,sc = 1,$$

oder, wie wir mit Rücksicht auf pag. 13 besser schreiben:

$$P = U \equiv (sa+1,\ sb,\ nsc,\ sd+1) \bmod 2s^2, \text{ resp. } \bmod s^2,$$
$$(sa+1)(sd+1) - sb\,nsc \equiv 1 \bmod 2s^2.$$

Das zugehörige V ist nach (10):

$$V \equiv (sa+1,\ nsb,\ sc,\ sd+1) \bmod 2s^2, \text{ resp. } \bmod s^2.$$

Die Aenderung von $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bei Ausübung von P auf ω_1, ω_2 ist nun nach pag. 13 so beschaffen, dass man auf das $\sigma_{\lambda\mu}$ des Zählers

---

1) Man vergleiche Klein, „Ueber die elliptischen Normalcurven der $n$ten Ordnung etc.“, Abhandl. der math.-phys. Classe der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Bd. 13, pag. 345.

die Substitution V, auf das $\sigma\lambda_\mu$ des Nenners die Substitution U auszuüben hat. Da sichtlich

$$U \equiv V \equiv (1, 0, 0, 1) \bmod 2s, \text{ resp. } \bmod s$$

ist, so geht $x\lambda_\mu{}^{(i)}$ in $x\lambda_\mu{}^{(j)}$ über, multiplicirt mit einer $s$ten Einheitswurzel. Die homogenen symmetrischen Functionen eines Systems von $x\lambda_\mu{}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots N$ ändern sich also bei linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2, welche $\bmod s$ zur Identität congruent sind, nur um $s$te Einheitswurzeln, d. h. sie sind in der Tat Modulfunctionen, welche der $s$ten Stufe in Bezug auf $s$te Einheitswurzeln adjungirt sind.[1]) Ihre Stufe ist jedoch s^2.

Dies ist nur der allgemeine Typus der Coefficienten. Je nach dem speciellen Verhalten einerseits des Grades m der homogenen symmetrischen Function in den $x\lambda_\mu{}^{(i)}$ und andrerseits der Zahl n zu s nehmen auch die Coefficienten speciellere Eigenschaften an.

Das erstere betreffend leuchtet ein, dass wenn der Grad m der homogenen symmetrischen Function ein Teiler von s ist, sie sich bei Substitutionen, welche $\bmod s$ zur Identität congruent sind, nur um $\frac{s}{m}$te Einheitswurzeln ändert und nur die Stufe $\frac{s^2}{m}$ hat.

Das zweite anlangend ist zu beachten, dass wenn $n \equiv 1 \bmod 2m$, resp. $\bmod m$ ist, unter m wieder einen Teiler von s verstanden, $U \equiv V \equiv (1, 0, 0, 1) \bmod 2ms$, resp. $\bmod ms$ ist. Es tritt also ebenfalls eine Reduction der Höhe der vortretenden Einheitswurzeln und der Stufe der Coefficienten durch Division mit m ein.

Betrachten wir beispielsweise den äussersten Fall $n \equiv 1 \bmod 2s$ resp. $\bmod s$, so ist bei dieser Voraussetzung $U \equiv V \equiv (1, 0, 0, 1) \bmod 2s^2$, resp. $\bmod s^2$, d. h. die homogenen symmetrischen Functionen der $x\lambda_\mu{}^{(i)}$ oder die Coefficienten der betrachteten Multiplicator-Gleichungen bleiben in diesem Fall bei Substitutionen, welche $\bmod s$ zur Identität congruent sind, ungeändert, gehören also der $s$ten Stufe selbst an.

Der pag. 15 abgeleitete allgemeine Satz postulirt die Darstellung von Modulfunctionen $\psi(\omega)$ der Stufe s^2, welche der $s$ten Stufe adjungirt sind. Diese lässt sich leisten, wenn ein volles Modulsystem

---

1) Da ausserdem ein System von N Grössen $x\lambda_\mu{}^{(i)}$ nicht schon bei Substitutionen, welche nach einem niedrigeren Modul als s zur Identität congruent sind, bis auf Einheitswurzeln in sich übergeht, so sind die homogenen symmetrischen Functionen eines solchen Systems auch nicht bereits einer niedrigeren Stufe adjungirt.

$s$ter Stufe $M_1, M_2, \ldots M_\alpha$ und das Fundamental-Polygon $s$ter Stufe[1]) als gegeben erachtet werden. Um dies zu erörtern, bezeichnen wir dieses Fundamental-Polygon, welches zur Gruppe der linearen Substitutionen gehört, die mod s zur Identität congruent sind, kurz als das der Multiplicator-Gleichung „zugehörige Fundamental-Polygon". Für alles Folgende kommen nur die Eckpunkte desselben in Betracht, welche auf der reellen Axe der ω-Halb-Ebene liegen und in Bezug auf die genannte Untergruppe inäquivalent sind; wir nennen sie die Ecken des Fundamental-Polygons. Da sich die darzustellenden Modulfunctionen $\psi(\omega)$ bei Substitutionen, welche mod s zur Identität congruent sind, um $s$te Einheitswurzeln ändern, so ist

$$[\psi(\omega)]^s = R(M_1, M_2, \ldots M_\alpha),$$

unter R eine rationale Function verstanden. Irrationale Functionen eines vollen Modulsystems $s$ter Stufe, welche eindeutige Functionen von ω sind, können nur in den Ecken des Fundamental-Polygons $s$ter Stufe verzweigt sein.[2]) Dies heisst, es ist zur Darstellung von $\psi(\omega)$ notwendig und hinreichend, in

$$(20) \qquad \psi(\omega) = \sqrt[s]{R_1(M_1, M_2, \ldots M_\alpha)}\, R_2(M_1, M_2, \ldots M_\alpha)$$

$\sqrt[s]{R_1(M_1, M_2, \ldots M_\alpha)}$ so zu construiren, dass es

1) nur in den Ecken des Fundamental-Polygons $s$ter Stufe verzweigt ist und

2) ein Congruenz-Modul der Stufe s^2 ist.

Damit ist die verlangte Darstellung von $\psi(\omega)$ gegeben. Es liegt auf der Hand, wie sich diese allgemeine Darstellung von $\psi(\omega)$ specialisirt, wenn einer der beiden pag. 16 namhaft gemachten speciellen Fälle vorliegt.

Bevor wir in der Behandlung unserer Multiplicator-Gleichungen für die $x_{\lambda\mu}^{(\nu)}$ fortfahren, dürfte es angemessen sein, an dieser Stelle einiges Wenige über die Behandlung der andern Transformations-Gleichungen mit den $\sigma_{\lambda\mu}$, resp. $x_{\lambda\mu}^{(\nu)}$ einzuschalten.

---

1) Betreffs der Definition und Construction der Fundamental-Polygone vergleiche man Hurwitz, Math. Ann. Bd. 18, pag. 537, ff.

2) Dies ist eine nahe liegende Verallgemeinerung des Math. Ann. Bd. 14, pag. 128 von Herrn Klein angegebenen Satzes.

§ 5. *Behandlung andrer TransformationsGleichungen mit den* $\sigma_{\lambda\mu}$.

Die andere der beiden pag. 14 und 15 erwähnten Aufgaben, nämlich die Aufgabe, die Multiplicator- und Modular-Gleichungen für die Combinationen der $x_{\lambda\mu^{(i)}}$ zu studiren, wird dadurch bedeutungsvoll, dass sich zeigt. dass die in der Transformations-Theorie gewöhnlich betrachteten Modulformen und Modulfunctionen sich in einfacher Weise durch die $\sigma_{\lambda\mu}$ darstellen. Man vergleiche hierzu I, § 3 der bereits citirten Abhandlung „Ueber die elliptischen Normalcurven etc.“ des Herrn Klein. Die Existenz dieser Gleichungen, die Stufe ihrer Coefficienten, lässt sich unter Anwendung des § 4 benutzten Verfahrens erschliessen.

Es mag genügen, explicite einerseits darauf hinzuweisen, dass man die Multiplicator-Gleichungen für $\sqrt[12]{\Delta}$ und die Jacobi'schen Multiplicator-Gleichungen von den $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgehend behandeln kann. In der Tat bestehen beispielsweise die Relationen:

$$(21) \qquad \sqrt[12]{\Delta} = \frac{1 - e^{\frac{4i\pi}{3}}}{2e^{\frac{3i\pi}{4}}} \frac{\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{11}(s=2)}{\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12}(s=3)}$$

und

$$(22) \qquad \sigma_{01} = \frac{e^{\frac{3i\pi}{2}}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt[4]{e_1-e_3}}, \quad \sigma_{10} = \frac{-1}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_1-e_2}},$$

$$\sigma_{11} = \frac{e^{\frac{5i\pi}{4}}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt[4]{e_1-e_2}},$$

resp

$$(22^b) \qquad \sqrt{e_1-e_2} = e^{\frac{3i\pi}{4}} \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{10}\sigma_{11}}, \quad \sqrt{e_2-e_3} = e^{\frac{7i\pi}{4}} \frac{\sigma_{10}}{\sigma_{01}\sigma_{11}}$$

$$\sqrt{e_1-e_3} = e^{\frac{5i\pi}{4}} \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{01}\sigma_{10}}.$$

Anderseits gestatten z. B. die Formeln:

$$(23)\quad \begin{cases} k^2 = -\left(\frac{\sigma_{10}}{\sigma_{11}}\right)^4 (s=2) = -\left(\frac{\sigma_{10}\,\sigma_{12}}{\sigma_{11}\,\sigma_{21}}\right)^8 (s=4) \\ \xi = -2\,\frac{{\sigma_{10}}^3}{{\sigma_{10}}^3 + i\sqrt{3}\,{\sigma_{01}}^3} (s=3) \\ o = -\frac{{\sigma_{10}}^2}{{\sigma_{01}}^2 + i\,{\sigma_{11}}^2} (s=2) = e^{\frac{3i\pi}{4}} \frac{{\sigma_{10}}^2}{{\sigma_{12}}^2} (s=4) \\ z = e^{\frac{2i\pi}{5}} \frac{\sigma_{01}\,\sigma_{11}\,\sigma_{21}\,\sigma_{31}\,\sigma_{41}}{\sigma_{02}\,\sigma_{12}\,\sigma_{22}\,\sigma_{32}\,\sigma_{42}} (s=5)\ ^{1}) \end{cases}$$

unter ξ, o, z eine bestimmt normirte Tetraeder-, Octaeder-, Ikosaeder-Irrationalität verstanden, die Modular-Gleichungen für $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt{k}$, k, k^2, ξ, $\sqrt{o}$, o, z auf Grund der $\sigma_{\lambda\mu}$ zu behandeln.

Wie für die 2te Stufe die fundamentalen Modular-Gleichungen nicht eigentlich diejenigen für k^2, sondern diejenigen für $\sqrt[4]{k}$ sind, insofern sich aus den letzteren die ersteren ableiten lassen, wird man z. B. bei $s = 3$ mit Vorteil die Modular-Gleichungen für

$$\frac{\sigma_{01}}{\sigma_{10}} = \sqrt{\frac{-\xi-2}{i\sqrt{3}\,\xi}}$$

studiren. Oder da beispielsweise wieder bei $s = 3$ die vier Grössen σ_{01}, σ_{10}, σ_{11}, σ_{12} ein volles Formensystem 9ter Stufe oder die Quotienten $\sigma_{01} : \sigma_{10} : \sigma_{11} : \sigma_{12}$ ein volles Modulsystem 9ter Stufe abgeben, so bieten sich die $\sigma_{\lambda\mu}$ sehr einfach dar, um die zugehörigen Correspondenzen zu studiren.

Aehnliches wird für höhere Fälle zu bemerken sein.

Wir beschränken uns nunmehr darauf, die Multiplicator-Gleichungen für die Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ selbst in das Auge zu fassen. Es mag jedoch bemerkt werden, dass die weitere Behandlungsweise im Princip auch dann zur Geltung kommt, wenn es sich um Combinationen der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ handelt.

---

1) Man vergleiche den II. Abschnitt des Textes, ferner pag. 77, 78 der Note des Herrn Klein vom 2. März 1885 in den Berichten der Kgl. S. Ges. d. Wissensch. „Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen“ und schliesslich Bianchi, Math. Ann. Bd. 17, pag. 244 und pag. 252. Jedoch sind in der genannten März-Note und bei Bianchi k^2, ξ, o, z in andrer Weise als hier fixirt.

§ 6. *Form der Coefficienten und Aufstellung der Gleichungen.*

Das Ziel, welches sich eine allgemeine Theorie der Transformations-Gleichungen setzen wird, ist dies, es möglich zu machen, bei vorgegebener Stufe und vorgegebener Ordnung n der Transformation die ins Auge gefasste Gleichung mit der kleinst-möglichen Anzahl unbestimmter Constanten anzuschreiben, welch letztere dann durch die Einsetzung der particulären Reihenentwicklungen nach q bestimmt werden können.

Um uns in der allgemeinen Betrachtung der Multiplicator-Gleichungen für die $x_{\lambda\mu}^{(\nu)}$ diesem Ziele zu nähern, haben wir nunmehr die Coefficienten, welche wir auf die Form (20) gebracht haben, weiter zu studiren.

Der nächste Schritt ist folgender: Da es für $s = 2$ nur $\frac{S}{s}$ und für $s > 2$ nur $\frac{S}{2s}$ verschiedene $\sigma_{\lambda\mu}$, dagegen für $s = 2$ S und für $s < 2$ $\frac{S}{2}$ nicht-homogene mod s incongruente lineare Substitutionen von ω_1, ω_2 giebt, so existiren nach (19), (19^b) für jede Gleichung für ein System von N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(\nu)}$ s nicht-homogene mod s incongruente lineare Substitutionen von ω_1, ω_2, welche die Gleichung in sich überführen. Da sich bei diesen s Substitutionen die Moduln M_1, M_2, ... M_α des vollen Systems für die $s$te Stufe in gewisser Weise ändern, so erhalten wir auf diese Weise für jeden Coefficienten $\psi(\omega)$ von der Form (20) s Bedingungen, s Functional-Gleichungen.

Noch weiter über die Form der Coefficienten kann uns die bisher benutzte gruppentheoretische Methode nicht orientiren. Dazu wird eine functionentheoretische Discussion erforderlich.

Der erste Schritt in dieser Richtung ist es, die $\sigma_{\lambda\mu}$ als Potenzreihen und unendliche Producte darzustellen. Dazu ziehen wir folgende Formeln heran:

$$(24) \qquad \vartheta_1(v,\ \omega) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k (-1)^k q^{\frac{(2k+1)^2}{4}} z^{(2k+1)},$$

worin

$$v = \frac{u}{\omega_1}, \qquad z = e^{\frac{ui\pi}{\omega_1}} = e^{i\pi v};$$

$$(25)\quad \sigma(u) = \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\, e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt[8]{\Delta}}\, \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1},\ \omega\right)$$

$$= e^{\frac{\eta_1 u^2}{\omega_1}}\, \frac{\omega_1}{\pi}\, \frac{z - z^{-1}}{2i} \prod_1^\infty \frac{1 - q^{2n} z^2}{1 - q^{2n}}\, \frac{1 - q^{2n} z^{-2}}{1 - q^{2n}},$$

$$(26)\quad \sqrt[8]{\Delta} = \left\{\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\, q^{1/12} \prod_1^\infty (1 - q^{2h})\right\}^3$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\, \frac{1}{\omega_1}\, \vartheta_1'(0) = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\right)^3 q^{1/4}(1 - 3q^{1.2} + 5q^{2.3} - 7q^{3.4} + \ldots$$

Damit wird:

$$(27)\quad \sigma_{\lambda\mu} = -\frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\, e^{\frac{\lambda\mu\, i\pi}{s^2}}\, q^{\frac{\mu^2}{s^2}}}{\sqrt[8]{\Delta}}\, \vartheta_1\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{s\,\omega_1},\ \omega\right)$$

$$= i\, \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\, e^{\frac{\lambda i\pi}{s}\left(1 + \frac{\mu}{s}\right)}\, q^{\left(\frac{\mu}{s} + \frac{1}{2}\right)^2}}{\sqrt[8]{\Delta}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k\, e^{k\frac{2\lambda i\pi}{s}}\, q^{\frac{2k\mu}{s} + k(k+1)}$$

und

$$(28)\quad \sigma_{\lambda\mu} = i\, \frac{\omega_1}{2\pi}\, e^{\frac{\lambda\mu}{s^2} i\pi}\, q^{\frac{\mu^2}{s^2}} \left\{e^{\frac{\lambda}{s} i\pi}\, q^{\frac{\mu}{s}} - e^{-\frac{\lambda}{s} i\pi}\, q^{-\frac{\mu}{s}}\right\}$$

$$\cdot \prod_1^\infty \left\{\frac{(1 - e^{+\frac{2\lambda}{s} i\pi}\, q^{2k + \frac{2\mu}{s}})\,(1 - e^{-\frac{2\lambda}{s} i\pi}\, q^{2k - \frac{2\mu}{s}})}{(1 - q^{2k})\,(1 - q^{2k})}\right\}$$

Die beiden letzten Gleichungen vermitteln unter Bezugnahme auf (15^b) die Reihen- und Product-Entwicklung der $x\lambda\mu^{(i)}$.

An diese Formeln knüpft nun die functionentheoretische Discussion einerseits an. Des einfachen Ausdrucks und der Anschaulichkeit wegen wollen wir dabei wieder vom Fundamental-Polygon und seinen Ecken sprechen (man vergleiche dazu pag. 22).

Zunächst kann man auf Grund von (28) und (15^b) die Werte sämtlicher $x\lambda\mu^{(i)}$ in der Ecke $\omega = i\infty$ des Fundamental-Polygons in endlicher und geschlossener Form angeben. Es ist, resp. verhält sich nämlich für $q = 0$ in erster Annäherung:

1) wenn $\mu = 0$, $\sigma_{\lambda\mu} = i\frac{\omega_1}{2\pi}(e^{\frac{\lambda i\pi}{s}} - e^{-\frac{\lambda i\pi}{s}})$,

2) wenn $\mu > 0$, $\sigma_{\lambda\mu} = -i\frac{\omega_1}{2\pi} e^{\frac{\lambda\mu i\pi}{s^2} - \frac{\lambda i\pi}{s}\frac{\mu^2}{q^{s^2}} - \frac{\mu}{s}}$.

Beispielsweise ist daher für $q = 0$:

$$x_{\lambda 0}^{(i)} = \frac{1}{d_i}\left\{\frac{e^{\frac{\lambda d_i i\pi}{s}} - e^{-\frac{\lambda d_i i\pi}{s}}}{e^{\frac{\lambda i\pi}{s}} - e^{-\frac{\lambda i\pi}{s}}}\right\}$$

Da die sämtlichen übrigen Ecken des Fundamental-Polygons durch lineare Substitution der Perioden aus dieser einen hervorgehen, wird durch die Formel (19) das Gleiche für die übrigen Ecken geleistet. Man kann sonach von vornherein die particulären Multiplicator-Gleichungen angeben, auf welche sich die allgemeine für beliebiges ω giltige Multiplicator-Gleichung in den Ecken des zugehörigen Polygons reducirt. Damit ist bereits eine gewisse Anzahl der zunächst unbestimmten Constanten, welche in die allgemeine, für beliebiges ω giltige Multiplicator-Gleichung eingehen, bestimmt. Denn um von den particulären Multiplicator-Gleichungen ausgehend die allgemeine zu bilden, um also die Gleichung von den Ecken des zugehörigen Fundamental-Polygons aus gewissermassen über das ganze Fundamental-Polygon hinweg fortzusetzen, hat man ihnen nur geeignete Zusatzglieder zu geben, deren Coefficienten die Form (20) haben und ausserdem den pag. 20 namhaft gemachten s Bedingungen genügen.

Weiter zeigen (28) und (15[b]), dass allgemein die Wurzeln $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ nur in den Ecken des zugehörigen Fundamental-Polygons null und unendlich werden, und bei vorgegebenem s lehren sie, in welchen dieser Ecken die Wurzeln null und unendlich werden und in welchen sie endlich bleiben. Setzt man dies in Verbindung mit der Lage der Null- und Unendlichkeitspunkte des benutzten vollen Modulsystems M_1, M_2, ... M_α, so erhält man andrerseits noch weitere Bedingungen für den Aufbau der Coefficienten. Es gelingt dadurch, diese Coefficienten als rationale ganze Functionen gewisser Aggregate der M_1, M_2, ... M_α aufzubauen. Der Grad dieser ganzen Functionen wird leicht abgezählt, wenn man die Anfangsglieder der Reihen-Entwicklungen der M_1, M_2, ... M_α und der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ berücksichtigt. Damit sind wir in der Tat in den Stand gesetzt, im gegebenen Falle die Multiplicator-Gleichung mit einer gewissen Anzahl

von unbestimmten Constanten anzuschreiben, wie dies im Eingange dieses Paragraphen beabsichtigt wurde.

Für die zuletzt angedeutete Discussion der Coefficienten und auch bereits für die s pag. 20 erschlossenen Bedingungen wird naturgemäss die specielle Auswahl und Werte-Verteilung des vollen Modul-Systems $M_1, M_2, \ldots M_\alpha$ für die $s$te Stufe massgebend. Sofern wir nicht über eine allgemeine Theorie voller Modulsysteme beliebiger Stufe verfügen, hat daher die Einzel-Untersuchung der Fälle $s = 2, 3, 4, \ldots$, bei denen wir geeignete Modulsysteme besitzen, die Form der Coefficienten im Detail zu studiren. Die nunmehr folgenden, ausführlich behandelten Fälle $s = 2, 3, 4$ sind in diesem Sinne durchaus nur als die ersten und einfachsten Beispiele zu betrachten.

Zweiter Abschnitt.

Specielle Behandlung der Multiplicator-Gleichungen der niedersten Stufen für die Teilwerte der σ-Function.

Erstes Capitel: $s = 2$.

§ 1. *Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ mit k^2.*

Wir recapituliren zunächst das Wichtigste, was sich aus I, § 1 für den vorliegenden Fall $s = 2$ ergiebt.

a) Bei beliebigen linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 permutiren sich die $\sigma_{\lambda\mu}$ bis auf vortretende 4te Einheitswurzeln und aus irgend einem der drei verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ lassen sich daher durch lineare Substitution der Perioden sämtliche drei $\sigma_{\lambda\mu}$ und nur diese ableiten.

Dies wird übrigens auch anschaulich, wenn wir die Tabelle für den Einfluss der beiden Erzeugenden

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\text{S)}\quad \omega_1' = \omega_1, \quad \omega_2' = \omega_1 + \omega_2 \quad \text{und} \\ &\text{T)}\quad \omega_1' = -\omega_2, \quad \omega_2' = \omega_1 \end{aligned}$$

der Gruppe auf die $\sigma_{\lambda\mu}$ angeben. Nämlich greifen wir σ_{01}, σ_{10}, σ_{11} als die drei verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ heraus,

(2) so geht bei Ausübung von S über in $+\sigma_{11}$ $+\sigma_{10}$ $-i\sigma_{01}$

bei Ausübung von T über in $+\sigma_{10}$ $-\sigma_{01}$ $-i\sigma_{11}$

Auf Grund dieses Schemas werden alle folgenden Tabellen ohne erläuternden Text verständlich sein.

b) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 2 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 4te Einheitswurzel, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind der 2ten Stufe adjungirt.

c) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 4 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 2te Einheitswurzel.

d) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 8 zur Identität congruent sind, bleibt jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ ungeändert, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind von der 8ten Stufe.

e) Die Substitutions-Coefficienten von linearen Substitutionen der Perioden, welche auf die $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgeübt werden, dürfen beliebig mod 8 modificirt werden.

Für den Hauptmodul 2ter Stufe k^2 setzen wir (mit Weierstrass):

$$(3) \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = 16q \frac{\{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots\}^8}{\{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots\}} = 16q\{1 - 8q + \ldots\}$$

wobei

$$(3^b) \quad e_1 = p\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \qquad e_2 = p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right), \qquad e_3 = p\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \text{ ist.}$$

Die Zusammenhänge (3), (3^b) geben das Verhalten von k^2 bei Ausübung von S und T, nämlich:

$$(4) \qquad \begin{matrix} & k^2 \\ \text{S)} & \frac{k^2}{k^2-1} \\ \text{T)} & 1-k^2. \end{matrix}$$

Die Werte-Verteilung von k^2 in den drei Ecken $\omega = i\infty$, 0, 1 des Fundamental-Polygons 2ter Stufe anlangend giebt die Definition (3) $k^2(i\infty) = 0$. Der Punkt $\omega = 0$ entsteht aus $\omega = i\infty$ durch die Operation T. Die Operation S führt schliesslich $\omega = 0$ in $\omega = 1$ über. Es ergiebt sich daher unter Benutzung von (4):

$$(5) \qquad k^2(i\infty) = 0, \quad k^2(0) = 1, \quad k^2(1) = \omega.$$

Wir wünschen, dies vorausgeschickt, die Beziehungen zwischen k^2 und den $\sigma_{\lambda\mu}$ zu gewinnen; b) lehrt in dieser Richtung, dass die Quotienten der 4ten Potenzen der $\sigma_{\lambda\mu}$ rationale Functionen von k^2

sind. Es genügt, einen Quotienten, etwa $\frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{10}^4}$ zu behandeln, da sich der andere daraus durch die Ausübung von S ergiebt. Die Werte von σ_{01} und σ_{10} für $\omega = ix$ folgen aus I., (28), und daraus ergeben sich dann weiter mit Bezug auf (2) die Werte für $\omega = 0, 1$; es findet sich so in erster Annäherung:

$$(6)\quad \begin{cases} \omega = i\infty) & \sigma_{01} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} q^{-\frac{1}{4}}, \quad \sigma_{10} = -\frac{\omega_1}{\pi} \\ \omega = 0) & \sigma_{01} = -\frac{\omega_1}{\pi} \qquad\qquad \sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi} q^{-\frac{1}{4}} \\ \omega = 1) & \sigma_{01} = e^{\frac{3i\pi}{4}} \frac{\omega_1}{2\pi} q^{-\frac{1}{4}}, \quad \sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi} q^{-\frac{1}{4}} \end{cases}$$

Da nach I., (28) die $\sigma\lambda\mu$ nur in den rationalen Punkten der reellen Axe null und unendlich werden, wird also $\frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{10}^4}$ null nur für $k^2 = 1$, unendlich nur für $k^2 = 0$. Das giebt den Ansatz:

$$\frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{10}^4} = C\frac{k^2 - 1}{k^2}$$

Ziehen wir beiderseits das erste Glied der Reihen-Entwickelungen heran, so lehrt dies $C = -1$, somit:

$$\frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{10}^4} = \frac{1 - k^2}{k^2}.$$

Bilden wir auf die oben angegebene Weise noch den anderen Quotienten $\frac{\sigma_{11}^4}{\sigma_{10}^4}$ und schreiben beide Resultate in einer fortlaufenden Proportion, so ist das Endresultat:

$$(7)\qquad \sigma_{01}^4 : \sigma_{10}^4 : \sigma_{11}^4 = (1 - k^2) : k^2 : -1.$$

Es folgt daraus beiläufig die Identität:

$$\sigma_{01}^4 + \sigma_{10}^4 + \sigma_{11}^4 = 0.$$

§ 2. *Die $x\lambda\mu^{(i)}$. Ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_2, ω_2. Die Transformationen der Gleichungen in sich.*

Die Repräsentanten I, (8)

$$\overline{\omega}_1^{(i)} = \alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2, \quad \overline{\omega}_2^{(i)} = \frac{\gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2}{n},$$

$$\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots N,$$

für Transformation $n$ter Ordnung (n ungerade) sind so zu wählen, dass die linearen Substitutionen der Perioden

$$\alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2, \quad \gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2$$

mod 8 zur Identität congruent sind. Betreffs des andern Repräsentanten-Systems I, (12 b)

$$\frac{a_i \omega_1}{n}, \quad \frac{8c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n}, \quad a_i d_i = n, \quad c_i < a_i,$$

beachten wir, dass d_i ungerade, also $D_i \equiv d_i^{-1} \equiv d_i \bmod 8$ wird. Deshalb wollen wir setzen $d_i = 2b_i + 1$ und beachten, dass

$$\sigma_{\lambda(2b_1+1),\,\mu(2b_1+1)} = (-1)^{b_i} \sigma_{\lambda\mu} \text{ ist.}$$

In den beiderlei Repräsentanten geschrieben haben wir so für die $x_{\lambda\mu^{(i)}}$:

$$(8) \quad x_{\lambda\mu^{(i)}} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}\{\overline{\omega}_1^{(i)}, \overline{\omega}_2^{(i)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}} = (-1)^{\frac{d_i - 1}{2}} \frac{\sigma_{\lambda\mu}\left\{\frac{a_i \omega_1}{n}, \frac{8c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}}$$

Es handelt sich nunmehr weiter um das Verhalten der $a_{\lambda\mu}$ bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Da wir diese linearen Substitutionen sämtlich aus S und T zusammensetzen können, berechnen wir nur die Aenderungen von S und T auf dem directen in I. § 3. angegebenen Wege.

Es entspricht einerseits:

$$P = S = U = (1, 0, 1, 1) \equiv$$
$$\begin{cases} (1, 0, 1.1, 1), \\ (1, 0, 3.3, 1), \\ \\ (1, 0, 5.5, 1), \\ (1, 0, 7.7, 1), \end{cases} \pmod 8 \quad V \equiv \begin{cases} (1, 0, 1, 1), \\ (1, 0, 3, 1), \\ \\ (1, 0, 5, 1), \\ (1, 0, 7, 1), \end{cases}$$

worin nach einander die vier Fälle unterschieden sind $n \equiv 1, 3, 5, 7 \bmod 8$.

Andrerseits entspricht in analoger Weise:

$$P = T = U = (0, -1, +1, 0) \equiv$$
$$\begin{cases} (0, -1, 1.1, 0), \\ (0, -1, 3.3, 0), \\ \\ (0, -1, 5.5, 0), \\ (0, -1, 7.7, 0), \end{cases} \pmod 8 \quad V \equiv \begin{cases} (0, -1, 1, 0), \\ (0, -3, 3, 0), \\ \\ (0, -5, 5, 0), \\ (0, -7, 7, 0). \end{cases}$$

Berechnen wir den Einfluss dieser 8 mod 8 incongruenten linearen Substitutionen von einer Determinante, welche $\equiv 1 \pmod 8$ ist, auf die drei $\sigma_{\lambda\mu}$, so können wir damit unmittelbar das Verhalten der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bei Ausübung von S und T tabelliren.

Im Falle $n \equiv 7 \bmod 8$ z. B. beachten wir, dass

$$T = U = (0, -1, +1, 0) \qquad \sigma_{11}' = -i\sigma_{11}$$
$$V = (0, -7, 7, 0) \qquad \sigma_{11}' = +i\sigma_{11}$$

zur Folge hat und also T jedes $x_{11}^{(i)}$ in

$$\frac{+i\sigma_{11}\{\overline{\omega}_1^{(j)}, \overline{\omega}_2^{(j)}\}}{-i\sigma_{11}} = -x_{11}^{(j)}$$

verwandelt.

Die vollständige Tabelle für den Einfluss von S und T ist folgende, wobei wir die oberen Indices i und j unterdrücken und ausserdem noch die Tabelle durch Combination von S und T zu den sechs mod 2 incongruenten linearen Substitutionen vervollständigen:

	x_{01}	x_{10}	x_{11}	k^2
$S)$	$+ \to x_{11}$ $-i \to x_{11}$ $- \to x_{11}$ $+i \to x_{11}$	$+ \to x_{10}$ $+ \to x_{10}$ $+ \to x_{10}$ $+ \to x_{10}$	$+ \to x_{01}$ $-i \to x_{01}$ $- \to x_{01}$ $+i \to x_{01}$	$\frac{k^2}{k^2-1}$
$T)$	$+ \to x_{10}$ $- \to x_{10}$ $+ \to x_{10}$ $- \to x_{10}$	$+ \to x_{01}$ $- \to x_{01}$ $+ \to x_{01}$ $- \to x_{01}$	$+ \to x_{11}$ $- \to x_{11}$ $+ \to x_{11}$ $- \to x_{11}$	$1-k^2$

(9)

$TS)$	$+ \to x_{11}$ $+i \to x_{11}$ $- \to x_{11}$ $-i \to x_{11}$	$+ \to x_{01}$ $- \to x_{01}$ $+ \to x_{01}$ $- \to x_{01}$	$+ \to x_{10}$ $+i \to x_{10}$ $- \to x_{10}$ $-i \to x_{10}$	$\frac{k^2-1}{k^2}$
$ST)$	$+ \to x_{10}$ $- \to x_{10}$ $+ \to x_{10}$ $- \to x_{10}$	$+ \to x_{11}$ $+i \to x_{11}$ $- \to x_{11}$ $-i \to x_{11}$	$+ \to x_{01}$ $+i \to x_{01}$ $- \to x_{01}$ $-i \to x_{01}$	$\frac{1}{1-k^2}$

$$STS) \quad \left.\begin{matrix} + \\ + \\ + \\ + \end{matrix}\right\} x_{01} \qquad \left.\begin{matrix} + \\ +i \\ - \\ -i \end{matrix}\right\} x_{11} \qquad \left.\begin{matrix} + \\ +i \\ - \\ -i \end{matrix}\right\} x_{10} \qquad \frac{1}{k^2}$$

Gleichzeitig ist damit für das weitere das Verhalten von k^2 bei den sechs mod 2 incongruenten Substitutionen tabellirt worden und die vierfache Fallunterscheidung bezieht sich immer auf die Fälle $n \equiv 1$, 3, 5, 7 mod 8.

Es geht also durch lineare Substitution der Perioden ω_1, ω_2 ein System von $N x\lambda\mu^{(i)}$ bis auf 4te Einheitswurzeln wieder in ein solches System über ohne einen solchen Factor $\frac{\sigma_{lm}}{\sigma_{l'm'}}$, wie er nach I. (19) bei allgemeinem s sich einstellt.

Die Tabelle (9) zeigt weiter die beiden Transformationen der drei simultanen Gleichungen in sich. Es bleibt nämlich die Gleichung für x_{01}, x_{10}, x_{11} (unter Ausschluss der identischen Operation) ungeändert, wenn man in derselben resp. die lineare Substitution STS, S, T der Perioden vornimmt.

Die Anwendung von I., § 4. auf den vorliegenden Fall $s = 2$ giebt als allgemeinen Satz: Je N Grössen $x\lambda\mu^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots N$, genügen einer Gleichung Nten Grades, deren Coefficienten der 2ten Stufe in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt sind.

Die beiden Specificationen werden diese:

a) Ist $n \equiv 1$ mod 4, so sind sämtliche Coefficienten von der 2ten Stufe.

b) Ist $n \equiv 3$ mod 4, so sinddie Coefficienten abwechselnd von der 2ten Stufe und der zweiten Stufe in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt, je nachdem die homogene symmetrische Function der $x\lambda\mu^{(i)}$, welche den Coefficienten constituirt, von geradem oder ungeradem Grade ist.

§ 3. *Werte der Wurzeln $x\lambda\mu^{(i)}$ in den Ecken des Fundamental-Polygons.*

Aus (8) und I., (28) erhalten wir unmittelbar die Werte der Wurzeln im Punkte $\omega = i\infty$. Die Tabelle (9) ermöglicht es sodann,

auf Grund derselben die Werte in den beiden andern Ecken des Fundamental-Polygons anzugeben. Auf diese Weise ist, resp. verhält sich in erster Annäherung:

$$
x_{01}\begin{cases}
\omega = i\infty) & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\,e^{-\frac{2c_i i\pi}{a_i}}\,q^{-\frac{1}{4}\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)} \\
\omega = 0) \begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix} & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i} \\
\omega = 1) \begin{matrix}+\\+i\\-\\-i\end{matrix} & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\,e^{-\frac{2e_i i\pi}{a_i}}\,q^{-\frac{1}{4}\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)}
\end{cases}
$$

$$
(10)\qquad x_{10}\begin{cases}
\omega = i\infty) & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i} \\
\omega = 0) \begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix} & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\,e^{-\frac{2c_i i\pi}{a_i}}\,q^{-\frac{1}{4}\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)} \\
\omega = 1) \begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix} & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\,e^{-\frac{2c_i i\pi}{a_i}}\,q^{-\frac{1}{4}\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)}
\end{cases}
$$

$$
x_{11}\begin{cases}
\omega = i\infty) & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\,e^{-\frac{2c_i i\pi}{a_i}}\,q^{-\frac{1}{4}\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)} \\
\omega = 0) \begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix} & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\,e^{-\frac{2c_i i\pi}{a_i}}\,q^{-\frac{1}{4}\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)} \\
\omega = 1) \begin{matrix}+\\+i\\-\\-i\end{matrix} & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}.
\end{cases}
$$

Wir achten darauf, dass uns diese Tabelle folgendes lehrt:

1) In einer Ecke des Fundamental-Polygons sind sämtliche N Wurzeln $x\lambda_\mu^{(i)}$ seines Systems endlich und von null verschieden.

2) In jeder der beiden andern Ecken werden die $N\, x\lambda_\mu^{(i)}$ eines Systems stets zu einem Teil null und zu einem Teil unendlich (ausserdem, wenn n eine Quadrat-Zahl ist, noch zu einem Teile endlich und $\gtrless 0$).

Die damit gefundenen Null- und Unendlichkeitspunkte der Wurzeln sind nach I., § 6. die einzigen im Fundamental-Polygon zweiter Stufe.

§ 4. *Form der Coefficienten. Aufstellung der Gleichungen.*

Betreffs der Form der Coefficienten haben wir zunächst die allgemeine Betrachtung von pag. 6. etc. auf Modulfunctionen $\psi(\omega)$ in Anwendung zu bringen, welche in Bezug auf zweite Einheitswurzeln zur zweiten Stufe adjungirt sind. Es genügt, nur diesen allgemeinen Fall zu behandeln, da der specielle Fall der Coefficienten zweiter Stufe durch $[\psi(\omega)]^2$ gegeben ist.

Zuvörderst ist:

$$[\psi(\omega)]^2 = R(k^2),$$

folglich, da $\psi(\omega)$ als eindeutige Function von ω nur in $\omega = i\infty$, 0, 1 verzweigt sein kann

$$(11)\quad \psi(\omega) = (\sqrt{k^2})^\alpha\, (\sqrt{1-k^2})^\beta\, R(k^2) = k^\alpha k'^\beta\, R(k^2),$$

unter α, β beliebige ganze Zahlen verstanden. Diese Darstellung genügt bereits von selbst der notwendigen Bedingung, einen Congruenz-Modul zu geben.

Um k und k' eindeutig zu definiren, gehen wir auf (7) zurück und setzen:

$$(12)\qquad k = +\, i\frac{\sigma_{10}^{\,2}}{\sigma_{11}^{\,2}},\quad k' = -\, i\frac{\sigma_{01}^{\,2}}{\sigma_{11}^{\,2}}.$$

Im Anschluss hieran tabelliren wir nach dem Schema (9) auch das Verhalten von k, k' bei den sechs mod 2 incongruenten linearen Substitutionen:

(9b)

	k	k'
S	$+i\frac{k}{k'}$	$+\frac{1}{k'}$
T)	$+k'$	$+k$
TS)	$+i\frac{k'}{k}$	$+\frac{1}{k}$
ST)	$+\frac{1}{k'}$	$+i\frac{k'}{k}$
STS)	$+\frac{1}{k}$	$-i\frac{k}{k'}$

Damit ist zugleich die Werte-Verteilung von k und k' in den Ecken des Fundamental-Polygons gegeben; es findet sich:

(13)

	k	k'
$\omega = i\infty$)	0	1
$\omega = 0$)	1	0
$\omega = 1$)	∞	∞.

Weitern Aufschluss über die Form der Coefficienten als durch (11) erhalten wir nach pag. 20 durch die Transformationen der Gleichungen in sich. Um mit Hilfe deren zunächst die Exponenten α und β in (11) zu bestimmen, bringen wir lineare Substitutionen in Anwendung, welche mod 2 zur Identität congruent sind, weil dadurch $R(k^2)$ in (11) nicht geändert wird. Die erzeugenden Substitutionen dieser Untergruppe sind S^2 und TS^2T; wir erhalten dafür:

	x_{01}	x_{10}	x_{11}	k	k'
S^2)	$-x_{01}$	$+x_{10}$	$-x_{11}$	$-k$	$+k'$
TS^2T)	$+x_{01}$	$-x_{10}$	$-x_{11}$	$+k$	$-k'$

Da $\psi(\omega)$ ein Coefficient ist, welcher eine homogene symmetrische Function ungeraden Grades der $x\lambda\mu^{(i)}$ ist, erfordert dies, dass diese Coefficienten bez. von der Form sind:

$$\begin{cases} \psi_{01}(\omega) = k\,R(k^2) \\ \psi_{10}(\omega) = k'\,R(k^2) \\ \psi_{11}(\omega) = kk'\,R(k^2) \end{cases}$$

wenn $\psi\lambda\mu$ der Gleichung für die $x\lambda\mu^{(i)}$ angehört.

Um nunmehr auch Aufschluss über die Form von $R(k^2)$ zu erhalten, benutzen wir die aus (9) zu entnehmenden Transformationen der Gleichungen in sich, welche von linearen Substitutionen der

Perioden herrühren, welche nicht mod 2 zur Identität congruent sind. Dies lehrt unter Bezugnahme auf (9 b):

(14)

$$\psi_{01}(\omega) = \left(k+\frac{1}{k}\right)R\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right) \qquad = \left(k+\frac{1}{k}\right)R\left\{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2\right\}$$

$$\psi_{10}(\omega) = \left(k'+\frac{1}{k'}\right)R\left(k'^2+\frac{1}{k'^2}\right) \qquad = \left(k'+\frac{1}{k'}\right)R\left\{\left(k'+\frac{1}{k'}\right)^2\right\}$$

$$\psi_{11}(\omega) = \left(i\frac{k'}{k}-i\frac{k}{k'}\right)R\left(\frac{k^2-1}{k^2}+\frac{k^2}{k^2-1}\right)$$

$$= \left(i\frac{k'}{k}-i\frac{k}{k'}\right)R\left\{\left(i\frac{k'}{k}-i\frac{k}{k'}\right)^2\right\}.$$

Die weitere Discussion ist functionentheoretischer Natur: Nach § 3. und Formel (13) werden die Wurzeln x_{01}, x_{10}, x_{11} nur null und unendlich bez. für unendlich grosses k und $\frac{1}{k}$, k' und $\frac{1}{k'}$, $+i\frac{k'}{k}$ und $-i\frac{k}{k'}$. Dies heisst: Die Coefficienten der Gleichungen sind, wenn man dieselben so anschreibt, dass die höchste Potenz den Coefficienten 1 hat, rationale ganze Functionen bez. der beiden Argumente k und $\frac{1}{k}$, k' und $\frac{1}{k'}$, $+i\frac{k'}{k}$ und $-i\frac{k}{k'}$ und das constante Glied jeder Gleichung ist unabhängig von k^2, also eine Constante und kann daher unmittelbar nach (10) angegeben werden.

Damit erhalten wir nun aus (14) die definitive Form der allgemeinen Coefficienten, welche der zweiten Stufe in Bezug auf zweite Einheitswurzeln adjungirt sind, in der Gestalt:

(15)
$$\psi_{01}(\omega) = \left(k+\frac{1}{k}\right)G\left\{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2\right\}$$

$$\psi_{10}(\omega) = \left(k'+\frac{1}{k'}\right)G\left\{\left(k'+\frac{1}{k'}\right)^2\right\}$$

$$\psi_{11}(\omega) = \left(i\frac{k'}{k}-i\frac{k}{k'}\right)G\left\{\left(i\frac{k'}{k}-i\frac{k}{k'}\right)^2\right\}$$

worin G eine rationale ganze Function andeutet. Wie bereits am Eingange dieses Paragraphen erwähnt wurde, erhalten wir aus (15) die specielle Form der Coefficienten einerseits im Falle $n \equiv 1 \bmod 4$

und andrerseits im Falle, dass für $n \equiv 3 \bmod 4$ die homogene symmetrische Function der Wurzeln von geradem Grade ist, durch Quadriren, also:

$$\chi_{01}(\omega) = G\left\{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2\right\}$$

(15) $$\chi_{10}(\omega) = G\left\{\left(k'+\frac{1}{k'}\right)^2\right\}$$

$$\chi_{10}(\omega) = G\left\{\left(i\frac{k'}{k}-i\frac{k}{k'}\right)^2\right\}.$$

Um bequem von irgend einer der drei simultanen Gleichungen zu den andern übergehen zu können, tabelliren wir noch das Verhalten der drei Argumente $\left(k+\frac{1}{k}\right)$ etc. bei Ausübung von S und T:

	$X_{01} = k+\frac{1}{k}$	$X_{10} = k'+\frac{1}{k'}$	$X_{11} = +i\frac{k'}{k} - i\frac{k}{k'}$
(16) S)	$-X_{11}$	$+X_{10}$	$+X_{01}$
T)	$+X_{10}$	$+X_{01}$	$-X_{11}$.

Die gefundenen Resultate betreffs der Form der Coefficienten lassen sich übrigens in folgendem Satze zusammenfassen: Im Falle $n \equiv 1 \bmod 4$ sind die Coefficienten der Gleichungen für die $x\lambda\mu^{(i)}$, sofern wir die Gleichungen mit dem ersten Coefficienten 1 anschreiben, **gerade** ganze Functionen von $X_{\lambda\mu}$ und im Falle $n \equiv 3 \bmod 4$ abwechselnd **gerade** und **ungerade** ganze Functionen von $X_{\lambda\mu}$, je nachdem die betreffende homogene symmetrische Function der Wurzeln selbst von geradem oder ungeradem Grade ist.

Der Grad jedes Coefficienten in $X_{\lambda\mu}$ resp. $X_{\lambda\mu}{}^2$ bestimmt sich dadurch, dass man mit (10) das erste Glied der Reihen-Entwicklung jedes Coefficienten in den drei Ecken des Fundamental-Polygons angeben kann. Die Vergleichung mit dem Anfangsgliede der Reihen-Entwicklung von $X_{\lambda\mu}$ in denselben drei Ecken liefert dann in der Tat den gesuchten Grad der ganzen Function im Argumente $X_{\lambda\mu}$ resp. $X_{\lambda\mu}{}^2$.

Unter Benutzung aller der im Vorhergehenden abgeleiteten Eigenschaften unserer Multiplicator-Gleichungen für die $x\lambda\mu^{(i)}$ ist man jederzeit im Stande, bei vorgegebenen n die Gleichungen mit einer gewissen Anzahl unbestimmter Constanten anzuschreiben. Diese können dann durch Einsetzen der Reihen-Entwickelungen einer Wurzel

$x\lambda_\mu{}^{(i)}$ und des $X\lambda_\mu$ nach q bestimmt werden. Da wir alle N Wurzeln unserer Gleichungen kennen, kann man auch durch Bildung der symmetrischen Functionen der Wurzeln jeden Coefficienten einzeln bestimmen. Im einzelnen Falle kann es auch, um mit möglichst wenig Gliedern der Reihen-Entwicklungen auszukommen, zweckmässig sein, beide Methoden zur Bestimmung der unbestimmten Constanten zu combiniren.

Dieser Process der Bestimmung der unbestimmten Constanten kommt, in einem geometrischen Bilde gesprochen, darauf hinaus, jede Gleichung von den Punkten $\omega = i\infty$, 0, 1 aus, für welche sie durch (10) gegeben ist, über das Fundamental-Polygon hinweg fortzusetzen.

Uebrigens liegt auf der Hand, dass es genügt hätte, die ganze Entwicklung nur für eine der drei simultanen Gleichungen zu geben. In diesem einfachsten Falle $s = 2$ haben wir es vorgezogen, die drei simultanen Gleichungen auch wirklich simultan zu behandeln, um ihre Gleichberechtigung vollkommen vor Augen zu führen.

Eine genügende Controle für die Richtigkeit der bestimmten Constanten erhält man, wenn man noch ein weiteres Glied in den Reihen-Entwicklungen hinzunimmt, welches bei der Bestimmung der Constanten nicht beteiligt ist. Auf diese Weise sind die Constanten in allen im folgenden gegebenen Beispielen verificirt worden.

§ 5. *Beispiele:* $n = 3, 5, 7, 9.$

$n = 3.$

Wir wollen etwa die Gleichung für die $x_{01}{}^{(i)}$ auf directem Wege, behandeln. Die Grössen a_i, $8c_i$, d_i für das kanonische Repräsentantensystem I, (12^b) $\frac{a_i\omega_1}{n}$, $\frac{8c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}$ werden folgende:

	x^i	$8c_i$	d_i
1)	1	0	3
2)	3	0	1
3)	3	8.1	1
4)	3	8.2	1.

Die vier Wurzeln sind daher diese:

$$x_{01}{}^{(1)} = -\frac{\sigma_{01}\left\{\frac{\omega_1}{3}, \omega_2\right\}}{\sigma_{01}} = Cq^{-1/2} + \ldots$$

$$x_{01}^{(2)} = + \frac{\sigma_{01}\left\{\omega_1, \frac{\omega_2}{3}\right\}}{\sigma_{01}} = Cq^{1/6} + \ldots$$

$$x_{01}^{(3)} = + \frac{\sigma_{01}\left\{\omega_1, \frac{8\omega_1+\omega_2}{3}\right\}}{\sigma_{01}} = Cq^{1/6} + \ldots$$

$$x_{01}^{(4)} = + \frac{\sigma_{01}\left\{\omega_1, \frac{16\omega_1+\omega_2}{3}\right\}}{\sigma_{01}} = Cq^{1/6} + \ldots$$

Gleichzeitig ist dabei das erste Glied ihrer Reihen-Entwicklungen markirt worden. Die Reihen-Entwicklung von X_{01} beginnt

$$X_{01} = q^{-1/2}(1 + \ldots$$

und die Reihe in der Parenthese schreitet nach ganzen Potenzen von q fort. Durch Bildung der symmetrischen Functionen $\Sigma x_{01}^{(i)}$, $\Sigma\Sigma x_{01}^{(i)} x_{01}^{(k)}$, etc. erkennen wir, dass nur der erste Coefficient mit einem Gliede in q beginnt, nämlich mit $Cq^{-1/2}$. Es hängt somit nur der erste Coefficient von X_{01} ab und zwar ist er eine lineare ganze Function von X_{01}.

Die particulären Multiplicator-Gleichungen in den drei Ecken des Fundamental-Polygons sind:

für
$\omega = i\infty$, $\quad X_{01} = \infty, \quad x_{01}^3 = 0$
$\omega = 0$, d. h. für $\quad X_{01} = 2, \quad (x_{01} - \frac{1}{3})(x_{01}+1)^3$
$\qquad = x_{01}^4 + \frac{8}{3} x_{01}^3 + 2x_{01}^2 - \frac{1}{3} = 0$
$\omega = 1$, $\quad X_{01} = \infty, \quad x_{01}^3 = 0.$

Deshalb erhalten wir sofort ohne eine unbestimmte Constante als allgemeine Gleichung:

$$x_{01}^4 + \tfrac{4}{3} X_{01} x_{01}^3 + 2x_{01}^2 - \tfrac{1}{3} = (x_{01} - \tfrac{1}{3})(x_{01}+1)^3 + \tfrac{4}{3}(X_{01} - 2) x_{01}^3 = 0.$$

Die Ausübung von T und S führt diese Gleichung in die beiden andern über:

$$x_{10}^4 - \tfrac{4}{3} X_{10} x_{10}^3 + 2x_{10}^2 - \tfrac{1}{3} = 0$$

und

$$x_{11}^4 - i\tfrac{4}{3} X_{11} x_{11}^3 - 2x_{11}^2 - \tfrac{1}{3} = 0.$$

$n = 5.$

Es ist

$$x_{01}^{(1)} = + \frac{\sigma_{01}\left\{\frac{\omega_1}{5}, \omega_2\right\}}{\sigma_{01}} = + \tfrac{1}{5} q^{-1}(1 + 2q + \ldots$$

während die Reihen-Entwicklung der übrigen fünf Wurzeln beginnt

$$x_{01}^{(i)} = Cq^{1/5} + \ldots, \quad i = 2, 3, \ldots 6.$$

Weiter ist

$$X_{01}^2 = \tfrac{1}{16} q^{-1}(1 + 40q + \ldots)$$

Durch Abzählen sehen wir, dass nur die erste symmetrische Function $\Sigma x_{01}^{(i)}$ mit einem Gliede in q beginnt und zwar mit Cq^{-1}. Es geht daher nur in den ersten Coefficienten X_{01}^2 ein und zwar linear.

Von den particulären Multiplicator-Gleichungen in den drei Ecken des Fundamental-Polygons interessirt uns nur die eine, deren Wurzeln endlich und von null verschieden sind, nämlich die Gleichung für

$$\omega = 0 \text{ oder } X_{01} = 2) : (x_{01} - \tfrac{1}{5})(x_{01} - 1)^5$$
$$= x_{01}^6 - \tfrac{26}{5} x_{01}^5 + 11 x_{01}^4 - 12 x_{01}^3 + 7 x_{01}^2 - 2 x_{01} + \tfrac{1}{5} = 0$$

Auf Grund dessen haben wir folgenden Ansatz mit einer unbestimmten Constanten:

$$(x_{01} - \tfrac{1}{5})(x_{01} - 1)^5 + A(X_{01}^2 - 4) x_{01}^5 = 0.$$

Um die Constante A zu bestimmen, ist es hier wohl am einfachsten zu beachten, dass

$$\begin{aligned} \Sigma x_{01}^{(i)} &= +\tfrac{1}{5} q^{-1}(1 + 2q + \ldots \\ &= +\tfrac{26}{5} - A\{\tfrac{1}{16} q^{-1}(1 + 40q + \ldots) - 4\} \\ &= +q^{-1}\left\{-\frac{A}{16} + (\tfrac{3}{2} A + \tfrac{26}{5}) q + \ldots\right\} \end{aligned}$$

sein soll. Dies giebt mit einer Verification $A = -\tfrac{16}{5}$, sodass die Gleichung für x_{01} lautet:

$$x_{01} - \tfrac{1}{5})(x_{01} - 1)^5 - \tfrac{16}{5}(X_{01}^2 - 4) x_{01}^5$$
$$= x_{01}^6 + \tfrac{2}{5}(19 - 8 X_{01}^2) x_{01}^5 + 11 x_{01}^4 - 12 x_{01}^3 + 7 x_{01}^2 - 2 x_{01} + \tfrac{1}{5} = 0$$

Mit der Tabelle (9) erhält man daraus als die beiden anderen Gleichungen:

$$x_{10}^6 + \tfrac{2}{5}(19 - 8 X_{10}^2) x_{10}^5 + 11 x_{10}^4 - 12 x_{10}^3 + 7 x_{10}^2 - 2 x_{10} + \tfrac{1}{5} = 0.$$
$$x_{11}^6 - \tfrac{2}{5}(19 - 8 X_{11}^2) x_{11}^5 + 11 x_{11}^4 + 12 x_{11}^3 + 7 x_{11}^2 + 2 x_{11} + \tfrac{1}{5} = 0.$$

$$n = 7.$$

Dafür ist

$$x_{01}^{(1)} = -\frac{\sigma_{01}\left\{\frac{\omega_1}{7}, \omega_2\right\}}{\sigma_{01}} = -\tfrac{1}{7} q^{-3/2}(1 + 2q + q^2 + 2q^3 + \ldots$$

während die Reihen-Entwicklungen der 7 anderen Wurzeln beginnen

$$x_{01}^{(i)} = q^{3/14}(C + \ldots)$$

wobei die Reihe in der Parenthese nach ganzen Potenzen von $q^{1/7}$ fortschreitet. Deshalb zählt man für die symmetrischen Functionen der Wurzeln folgende Anfangsglieder ab:

$$c_1 = -\Sigma x_{01}^{(i)} = Cq^{-3/2}$$
$$c_2 = \Sigma\Sigma x_{01}^{(i)} x_{01}^{(k)} = Cq^{-1}$$
$$c_3 = -\Sigma\Sigma\Sigma x_{01}^{(i)} x_{01}^{(k)} x_{01}^{(l)} = Cq^{-1/2}$$
$$c_4 = C$$
$$c_5 = Cq^{-1/2}$$
$$c_6 = C$$
$$c_7 = C$$

Die particuläre Multiplicator-Gleichung für $\omega = 0$ oder $X_{01} = 2$ ist:

$$(x_{01} - \tfrac{1}{7})(x_{01} + 1)^7$$
$$= x_{01}^8 + \tfrac{48}{7} x_{01}^7 + 20x_{01}^6 + 32x_{01}^5 + 30x_{01}^4 + 16x_{01}^3 + 4x_{01}^2 - \tfrac{1}{7} = 0.$$

Wir haben daher für die allgemeine Gleichung folgenden Ansatz mit zwei unbestimmten Constanten:

$$x_{01}^8 + X_{01}\{(\tfrac{24}{7} - 4A) + AX_{01}^2\}x_{01}^7 + \{(20 - 4B) + BX_{01}^2\}x_{01}^6$$
$$+ 16X_{01}x_{01}^5 + 30x_{01}^4 + 8X_{01}x_{01}^3 + 4x_{01}^2 - \tfrac{1}{7} = 0.$$

Um A und B zu bestimmen, wollen wir die Reihen-Entwicklung von $x_{01}^{(1)}$ und X_{01} in der Gleichung einsetzen. Wir beachten, dass die einzelnen Glieder der Gleichung folgendermassen in q beginnen:

$$x_{01}^8 = Cq^{-12} + \ldots$$
$$X_{01}\{(\tfrac{24}{7} - 4A) + AX_{01}^2\}x_{01}^7 = Cq^{-12} + \ldots$$
$$\{(20 - 4B) + BX_{01}^2\}x_{01}^6 = Cq^{-10} + \ldots$$
$$16X_{01}x_{01}^5 = + Cq^{-8} + \ldots$$

etc. etc.

Wir berechnen daher zunächst A mit einer Verification, indem wir zwei Glieder der beiden ersten Reihen-Entwicklungen combiniren, und zwar ist:

$$x_{01}^8 = +\frac{1}{7^8} q^{-12}\left\{1 + 16q + \ldots\right\}$$

$$X_{01}\left\{\left(\frac{24}{7} - 4A\right) + AX_{01}^2\right\}x_{01}^7 = -\frac{1}{4 \cdot 7^7} q^{-12}\left\{\frac{A}{16} + \left(\frac{24}{7} + \frac{5A}{8}\right)q + \ldots\right\}$$

Dies giebt mit der gewünschten Verification $A = +\frac{64}{7}$. Um auch B auf diese Weise mit einer Verification zu bestimmen, haben wir vier Glieder der drei ersten Reihen-Entwicklungen zu nehmen, nämlich:

$$x_{01}{}^8 = +\frac{1}{7^8}q^{-12}\left\{1+16q+120q^2+576q^3+\ldots\right\}$$

$$X_{01}\left\{-\frac{232}{7}+\frac{64}{7}X_{01}{}^2\right\}x_{01}{}^7 = -\frac{1}{7^8}q^{-12}\left\{1+16q-27q^2+3320q^3+\ldots\right\}$$

$$\left\{(20-4B)+BX_{01}{}^2\right\}x_{01}{}^6 + \frac{1}{7^6}q^{-10}\left\{\begin{matrix}B\\16\end{matrix}+(20-\frac{3}{4}B)q+\ldots\right\}$$

Daraus folgt mit der gewünschten Verification $B = -48$ und also lautet die definitive Gleichung:

$$x_{01}{}^8+\tfrac{8}{7}X_{01}\{-29+8X_{01}{}^2\}x_{01}{}^7+4\{53-12X_{01}{}^2\}x_{01}{}^6+16X_{01}x_{01}{}^5 + 30x_{01}{}^4+8X_{01}x_{01}{}^3+4x_{01}{}^2-\tfrac{1}{7}=0.$$

Die beiden andern Gleichungen werden:

$$x_{10}{}^8-\tfrac{8}{7}X_{10}\{-29+8X_{10}{}^2\}x_{10}{}^7+4\{53-12X_{10}{}^2\}x_{10}{}^6-16X_{10}x_{10}{}^5 + 30x_{10}{}^4-8X_{10}x_{10}{}^3+4x_{10}{}^2-\tfrac{1}{7}=0$$

$$x_{11}{}^8+\tfrac{8}{7}iX_{11}\{-29+8X_{11}{}^2\}x_{11}{}^7-4\{53-12X_{11}{}^2\}x_{11}{}^6-16iX_{11}x_{11}{}^5 + 30x_{11}{}^4+8iX_{11}x_{11}{}^3-4x_{11}{}^2-\tfrac{1}{7}=0$$

$$n = 9.$$

Dafür ist:

$$x_{01}{}^{(1)} = +\frac{\sigma_{01}\left\{\begin{matrix}\frac{\omega_1}{9}&\omega_2\end{matrix}\right\}}{\sigma_{01}} = +\tfrac{1}{3}q^{-2}(1+\ldots$$

welche Reihe nach ganzen Potenzen von q fortschreitet. Weiter ist:

$$x_{01}{}^{(2)} = -\frac{\sigma_{01}\left\{\begin{matrix}\frac{\omega_1}{3}, & \frac{8\omega_1+3\omega_2}{9}\end{matrix}\right\}}{\sigma_{01}} = \text{Const}+\ldots$$

$$x_{01}{}^{(3)} = -\frac{\sigma_{01}\left\{\begin{matrix}\frac{\omega_1}{3} & \frac{16\omega_1+3\omega_2}{9}\end{matrix}\right\}}{\sigma_{01}} = \text{Const}+\ldots$$

welche Reihen ebenfalls nach ganzen Potenzen von q fortschreiten. Die Reihen-Entwicklungen der 9 übrigen Wurzeln beginnen:

$$x_{01}{}^{(i)} = Cq^{2/9}(1+\ldots), \quad i = 4, 5, \ldots 12$$

wobei die Reihe in der Parenthese nach Potenzen von $q^{1/9}$ fortschreitet. Auf Grund dessen zählt man für die symmetrischen Functionen der Wurzeln folgende Anfangsglieder ab:

$$c_1 = -\Sigma x_{01}{}^{(i)} = Cq^{-2}$$

$$c_2 = \Sigma\Sigma x_{01}^{(i)} x_{01}^{(k)} = Cq^{-2},$$
$$c_3 = -\Sigma\Sigma\Sigma x_{01}^{(i)} x_{01}^{(k)} x_{01}^{(l)} = Cq^{-2},$$
$$c_4 = Cq^{-1},$$
$$c_5 = Cq^{-1},$$
$$c_6 = Cq^{-1},$$
$$c_7 = Cq^{-1},$$
$$c_8 = C,$$
$$c_9 = C, \text{ etc.}$$

Die Wurzeln der Multiplicator-Gleichung für die Grössen $x_{01}^{(i)}$ sind für $\omega = 0$ wie in den vorangehenden Beispielen sämtlich endlich und von null verschieden; abweichend von den drei vorausgeschickten Beispielen sind aber, weil nämlich n eine Quadrat-Zahl ist, auch für die beiden andern Ecken des Fundamental-Polygons zwei Wurzeln endlich und von null verschieden. Wir machen daher von allen drei particulären Multiplicator-Gleichungen Gebrauch, um die Zahl der in die allgemeine Gleichung eingehenden zunächst unbestimmten Constanten nach Möglichkeit zu reduciren. Dieselben sind:

für $X_{01} = \infty$, $\left(x_{01} + \frac{1}{3} e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(x_{01} + \frac{1}{3} e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) x_{01}^9 =$
$$\left(x_{01}^2 - \frac{1}{3} x_{01} + \frac{1}{9}\right) x_{01}^9 = 0,$$

für $X_{01} = 2$, $\left(x_{01} - \frac{1}{9}\right)\left(x_{01} + \frac{1}{3}\right)^2 (x_{01} - 1)^9 =$
$$x_{01}^{12} - \frac{76}{9} x_{01}^{11} + \frac{838}{27} x_{01}^{10} - \frac{5212}{81} x_{01}^9 + \frac{727}{9} x_{01}^8 - \frac{536}{9} x_{01}^7$$
$$+ \frac{532}{27} x_{01}^6 + \frac{40}{9} x_{01}^5 - \frac{19}{3} x_{01}^4 + \frac{44}{27} x_{01}^3 + \frac{2}{9} x_{01}^2 - \frac{4}{27} x_{01} + \frac{1}{81} = 0.$$

Daher gewinnen wir folgenden Ansatz mit 8 unbestimmten Constanten:

$$x_{01}^{12} + AX_{01}^4\left(x_{01}^2 - \frac{1}{3} x_{01} + \frac{1}{9}\right) x_{01}^9$$
$$+ \left\{\left(-\frac{76}{9} - 4B - 16A\right) + BX_{01}^2\right\} x_{01}^{11}$$
$$+ \left\{\left(\frac{38}{27} - 4C + \frac{16}{3} A\right) + CX_{01}^2\right\} x_{01}^{10}$$
$$+ \left\{\left(-\frac{5212}{81} - 4D - \frac{16}{9} A\right) + DX_{01}^2\right\} x_{01}^9$$

$$+\left\{\left(\frac{727}{9}-4E\right)+EX_{01}^{2}\right\}x_{01}^{8}+\left\{\left(-\frac{536}{9}-4F\right)+FX_{01}^{2}\right\}x_{01}^{7}$$
$$+\left\{\left(\frac{532}{27}-4G\right)+GX_{01}^{2}\right\}x_{01}^{6}+\left\{\left(\frac{40}{9}-4H\right)+HX_{01}^{2}\right\}x_{01}^{5}$$
$$-\frac{19}{3}x_{01}^{4}+\frac{44}{27}x_{01}^{3}+\frac{2}{9}x_{01}^{2}-\frac{4}{27}x_{01}+\frac{1}{81}=0.$$

Nach Bestimmung der Constanten erhält man:

$$x_{01}^{12}-\frac{256}{9}X_{01}^{4}\left(x_{01}^{2}-\frac{1}{3}x_{01}+\frac{1}{9}\right)x_{01}^{9}+\left\{-108+\frac{416}{3}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{11}$$
$$+\left\{2866-\frac{2240}{3}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{10}+\left\{\frac{8103}{3}-\frac{6112}{9}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{9}$$
$$+\left\{479-\frac{896}{9}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{8}+\left\{40-\frac{224}{9}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{7}$$
$$+\left\{124-\frac{704}{27}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{6}+\left\{\frac{56}{3}-\frac{32}{9}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{5}$$
$$-\frac{19}{8}x_{01}^{4}+\frac{44}{27}x_{01}^{3}+\frac{2}{9}x_{01}^{2}-\frac{4}{27}x_{01}+\frac{1}{81}=0.$$

Wegen der complicirten Beschaffenheit dieser Gleichung mag es genügen, nur diese eine der drei simultanen Gleichungen angeführt zu haben.

Zweites Capitel: $s = 3$.

§ 1. *Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ mit der Tetraeder-Irrationalität.*

Das Verhalten der $\sigma_{\lambda\mu}$ bei linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 anlangend gilt hier folgendes:

a) Bei beliebigen linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 permutiren sich die $\sigma_{\lambda\mu}$ bis auf vortretende 6te Einheitswurzeln und es lassen sich daher durch lineare Substitution der Perioden aus irgend einem der vier verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ sämtliche vier $\sigma_{\lambda\mu}$ und nur diese ableiten.

Dies geht, abgesehen vom früheren directen Nachweise, auch daraus hervor, dass die Erzeugenden S und T der Gruppe der linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 diesen Einfluss auf die vier verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ ausüben. Greifen wir σ_{01}, σ_{10}, σ_{11} und σ_{12} als die vier verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ heraus, so ist das diesbezügliche Verhalten folgendes:

(1)

	σ_{01}	σ_{10}	σ_{11}	σ_{12}
S	$+\sigma_{11}$	$+\sigma_{10}$	$-\varepsilon\sigma_{12}$	$-\varepsilon\sigma_{01}$
T	$+\sigma_{10}$	$-\sigma_{01}$	$-\varepsilon^2\sigma_{12}$	$-\varepsilon\sigma_{11}$.

b) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 3 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 3te Einheitswurzel, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind der 3ten Stufe adjungirt.

c) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 9 zur Identität congruent sind, bleibt jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ ungeändert, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind von der 9ten Stufe.

d) Die Substitutions-Coefficienten von linearen Substitutionen der Perioden, welche auf die $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgeübt werden, dürfen beliebig mod 18 (nicht mod 9) modificirt werden.

Als den Haupt-Modul für die 3te Stufe führen wir nach Herrn Klein [1]) die folgende Tetraeder-Irrationalität ein:

$$\xi = -6q^{2/3}\frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\,q^{3k^2+3k}}{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^k(6k+1)\,q^{3k^2+k}} \qquad (2)$$

deren Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2 wir wieder dadurch angeben, dass wir das Verhalten speciell bei Ausübung von S und T notiren. Es ist dies folgendes:

$$\begin{array}{ccc} & & \xi \\ S & & \varepsilon.\xi \\ T & & \dfrac{\xi+2}{\xi-1} \end{array} \qquad (3)$$

Das Fundamental-Polygon 3ter Stufe hat vier Ecken, als welche wir $\omega = i\infty$, 0, 1, 2 annehmen können. Es gilt zunächst, auf Grund der gegebenen Definition von ξ dessen Werte in diesen vier Punkten anzugeben. (2) giebt direct den Wert für $\omega = \infty$; ihn benutzend giebt (3) den Wert für $\omega = 0$, 1, 2 und zwar findet sich

$$\xi(i\infty) = 0, \quad \xi(0) = -2, \quad \xi(1) = -2\varepsilon, \quad \xi(2) = -2\varepsilon^2 \qquad (4)$$

Wünschen wir nunmehr die Beziehungen von ξ zu den $\sigma_{\lambda\mu}$ kennen zu lernen, so lehrt (b), dass die Quotienten der 3ten Potenzen der $\sigma_{\lambda\mu}$ rationale Functionen der Tetraeder-Irrationalität sind. Wir behandeln etwa den Quotienten $\frac{\sigma_{01}{}^3}{\sigma_{10}{}^3}$. Die Werte der $\sigma_{\lambda\mu}$ für $\omega = i\infty$ ergeben sich aus Abschn. I, (28); mittels (1) kann man dann die

---

1) Man vergleiche Klein, „Vorlesungen über den Ikosaeder“, Leipzig 1884, pag. 133.

Werte der $\sigma_{\lambda\mu}$ in den andern Ecken des Fundamental-Polygons angeben. Für diese vier Punkte ist in erster Annäherung:

$$\omega = i\infty) \quad \sigma_{01} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} q^{-2/9}, \qquad \sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{-\frac{i\pi}{3}}),$$

$$\sigma_{11} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} e^{-\frac{2i\pi}{9}} q^{-2/9}, \quad \sigma_{12} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} e^{-\frac{i\pi}{9}} q^{-2/9},$$

$$(5) \quad \omega = 0) \quad \sigma_{01} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{-\frac{i\pi}{3}}), \quad \sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi} q^{-2/9},$$

$$\omega = 1) \quad \sigma_{01} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} \varepsilon^2 e^{-\frac{i\pi}{9}} q^{-2/9}, \quad \sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi} q^{-2/9},$$

$$\omega = 2) \quad \sigma_{01} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} \varepsilon^2 e^{-\frac{2i\pi}{9}} q^{-2/9}, \quad \sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi} q^{-2/9},$$

Da die $\sigma_{\lambda\mu}$ nur in den rationalen Punkten der reellen Axe null und unendlich werden, wird sonach $\frac{\sigma_{01}^3}{\sigma_{10}^3}$ null nur für $\xi = -2$, unendlich nur für $\xi = 0$. Dies heisst, es ist:

$$\frac{\sigma_{01}^3}{\sigma_{10}^3} = C\frac{\xi+2}{\xi}$$

Vergleichen wir je das erste Glied der Reihen-Entwicklung auf beiden Seiten, so findet sich:

$$\frac{\sigma_{01}^3}{\sigma_{10}^3} = \frac{1}{-i\sqrt{3}} \cdot \frac{\xi+2}{\xi}.$$

Bilden wir durch Ausübung der Operationen S und T hieraus die beiden anderen Quotienten, so lässt sich das Endresultat zusammenfassen in

$$(6) \quad \sigma_{10}^3 : \sigma_{01}^3 : \sigma_{11}^3 : \sigma_{12}^3 = -i\sqrt{3} \cdot \xi : (\xi+2) : (\xi+2\varepsilon^2) : -(\xi+2\varepsilon),$$

§ 2. *Die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$. Ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Die Transformationen der Gleichungen in sich.*

Wir wählen für Transformation $n$ter Ordnung ($n \equiv 1$ oder $2 \bmod 3$) das eine Repräsentanten-System

$$\overline{\omega}_1^{(i)} = \alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2, \quad \overline{\omega}_2^{(i)} = \frac{\gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2}{n}$$

$$\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots N,$$

so, dass die linearen Substitutionen der Perioden

$$\alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2, \quad \gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2$$

mod 3 zur Identität congruent sind. Das andre Repräsentanten-System wird:

$$\frac{a_i \omega_1}{n}, \quad \frac{9c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n}, \quad a_i d_i = n, \quad c_i < a_i.$$

Da mit n auch d_i nicht durch 3 teilbar ist, so ist

$$d_i^{-1} \equiv d_i \bmod 3$$

und dies hat zur Folge

$$\sigma_{\lambda A_i + \mu C_i,\ \lambda B_i + \mu D_i} = E_{\lambda\mu}^{(i)}\, \sigma_{\lambda d_i,\ \mu d_i - 1} = E_{\lambda\mu}^{(i)}\, \sigma_{\lambda\mu},$$

unter $E_{\lambda\mu}^{(i)}$ eine 6te Einheitswurzel verstanden. In den beiderlei Repräsentanten geschrieben haben wir so für die Wurzeln unserer zu betrachtenden Multiplicator-Gleichungen:

$$(7) \quad x_{\lambda\mu}^{(i)} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}\{\overline{\omega}_1^{(i)}, \overline{\omega}_2^{(i)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}}$$

$$= \frac{\sigma_{\lambda A_i + \mu C_i,\ \lambda B_i + \mu D_i}\left\{\frac{a_i \omega_1}{n}, \frac{9c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}}$$

$$= E_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\sigma_{\lambda\mu}\left\{\frac{a_i \omega_1}{n}, \frac{9c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}}$$

Damit sind die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ eindeutig definirt. Es handle sich jetzt um ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Es genügt wieder, die Aenderungen bei Ausübung von S und T zu bestimmen.

Einerseits entspricht:

$$P = S = U = (1, 0, 1, 1) \equiv \begin{cases} (1, 0, 1.1, 1) \\ (1, 0, 4.7, 1) \\ (1, 0, 7.4, 1) \\ \\ (1, 0, 2.5, 1) \\ (1, 0, 5.2, 1) \\ (1, 0, 8.8, 1) \end{cases} \pmod 9 \qquad V = \begin{cases} (1, 0, 1, 1) \\ (1, 0, 7, 1) \\ (1, 0, 4, 1) \\ \\ (1, 0, 5, 1) \\ (1, 0, 2, 1) \\ (1, 0, 8, 1), \end{cases}$$

wobei nach einander die 6 Fälle $n \equiv 1, 4, 7, 2, 5, 8$ unterschieden sind, wie dies im folgenden immer geschieht. Andrerseits entspricht in analoger Weise:

$$P = T = U = (0, -1, +1, 0) \equiv$$

$$\begin{cases} (0, -1, 1.1, 0) \\ (0, -1, 4.7, 0) \\ (0, -1, 7.4, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} (0, -1, 1, 0) \\ (0, -4, 7, 0) \\ (0, -7, 4, 0) \end{cases}$$

$$\pmod 9 \qquad V \equiv$$

$$\begin{cases} (0, -1, 2.5, 0) \\ (0, -1, 5.2, 0) \\ (0, -1, 8.8, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} (0, -2, 5, 0) \\ (0, -5, 2, 0) \\ (0, -8, 8, 0) \end{cases}$$

Die letzten 5 linearen Substitutionen V der Perioden haben nur eine Determinatne, welche $\equiv 1 \bmod 9$, nicht aber gleich 1 ist. Wir haben für dieselben zuvörderst durch Modification der Substitutions-Coefficienten mod 9 die Determinante gleich 1 zu machen. Die so normirten Substitutions-Coefficienten dürfen dann behufs einfacherer Berechnung der entsprechenden Aenderung der $\sigma_{\lambda\mu} \bmod 18$ modificirt werden.

Berechnen wir den Einfluss der angegebenen 12 mod 9 incongruenten linearen Substitutionen auf die vier $\sigma_{\lambda\mu}$, so können wir damit unmittelbar das Verhalten der $x_{\lambda\mu}$ bei Ausübung von S und T zusammenstellen.

Im Falle $n \equiv 8 \bmod 9$ z. B. beachten wir, dass

$$(0, -8, 8, 0) \equiv (9, 1, 80, 9) \bmod 9$$

ist, wovon die letztere Substitution die Determinante 1 hat. Wir ersetzen dieselbe einfacher durch (9, 1, 8, 9). Nun hat

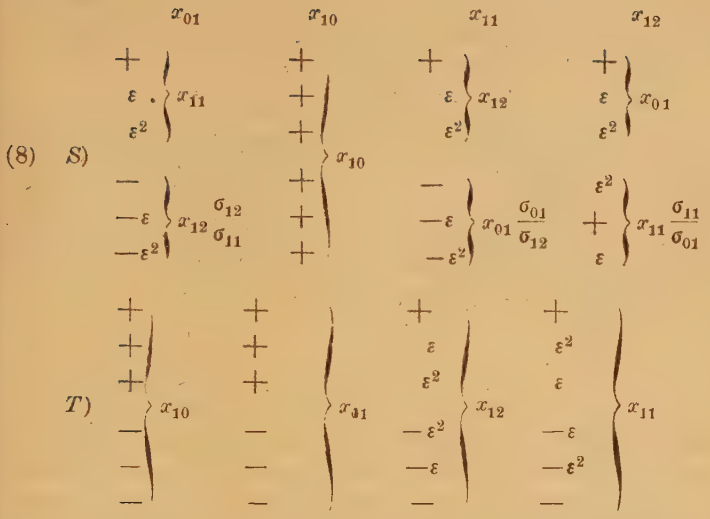
$$\begin{aligned} T = U &= (0, -1, +1, 0) & \sigma_{12}' &= -\varepsilon\,\sigma_{11} \\ V &\equiv (9, 1, 8, 9) & \sigma_{12}' &= +\varepsilon\,\sigma_{11} \end{aligned}$$

zur Folge, und also verwandelt T jedes $x_{12}^{(i)}$ in

$$\frac{-\varepsilon\,\sigma_{11}\{\bar{\omega}_1^{(j)},\ \bar{\omega}_2^{(j)}\}}{+\varepsilon\,\sigma_{11}} = -x_{11}^{(j)}.$$

Die vollständige Tabelle für die Aenderungen bei Ausübung von S und T ist folgende, wenn wir die oberen Indices i und j unterdrücken:

(8)



Es geht also im Falle $n \equiv 1 \bmod 3$ durch lineare Substitution von ω_1, ω_2 ein System von N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bis auf 3te Einheitswurzeln wieder ein solches System über ohne einen solchen Factor $\frac{\sigma_{lm}}{\sigma_{l'm'}}$ in I. (19), wie dies bei allgemeinem s der Fall is. Für $n \equiv 2 \bmod 3$ hingegen geht durch lineare Substitution von ω_1, ω_2 ein System von N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bis auf 6te Einheitswurzeln wieder in ein solches System x_{lm} über, multiplicirt mit $\frac{\sigma_{lm}}{\sigma_{l'm'}}$.

Im Besitze der Tabelle (8) ist es leicht, die Transformationen in sich jeder der vier simultanen Gleichungen aufzusuchen. Um hierbei und weiterhin Weitläufigkeiten zu vermeiden, beschränken wir, abweichend von der Darstellung bei $s = 2$, unsere Entwicklungen von jetzt an auf eine der vier simultanen Gleichungen. Durch Ausübung der Operationen S und T ist es dann leicht, die gewonnenen Resultate auf die drei andern zu übertragen. Der Tabelle (8) gemäss wird es am einfachsten sein, die Gleichung für x_{10} herauszugreifen. Dafür ergiebt sich der Satz: Die Gleichung für x_{10} bleibt (unter Ausschluss der identischen Operation) ungeändert, wenn man in derselben die linearen Substitutionen S und S^2 der Perioden ω_1, ω_2 vornimmt.

Betreffs der Existenz der Multiplicator-Gleichungen giebt die Anwendung von I. § 4 auf den vorliegen Fall $s = 3$ folgenden allgemeinen Satz: Je N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots N$ genügen

einer Gleichung Nten Grades, deren Coefficienten der 3ten Stufe in Bezug auf 3te Einheitswurzeln adjungirt sind.

Die beiden Specificationen werden diese:

a) Ist $n \equiv 1 \bmod 3$, so sind sämtliche Coefficienten von der 3ten Stufe.

b) Ist $n \equiv 2 \bmod 3$, so sind die Coefficienten, welche homogenen symmetrischen Functionen 3ten Grades der Wurzeln entsprechen, von der 3ten Stufe.

§ 3. *Werte der Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ in den Ecken des Fundamental-Polygons.*

Aus (7) und I. (28) erhalten wir unmittelbar die Werte der Wurzeln im Punkte $\omega = i\infty$. Die Tabelle (8) ermöglicht es sodann, auf Grund derselben die Werte der Wurzeln in den drei andern Ecken des Fundamental-Polygons anzugeben. Auf diese Weise findet man folgendes Verhalten der Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ (bez. in erster Annäherung):

$$\omega = i\infty \qquad E_{10}^{(i)} \frac{1}{d_i}$$

$$(9) \qquad \left.\begin{matrix}\omega = 0\\ \omega = 1\\ \omega = 2\end{matrix}\right\} \pm\} E_{01}^{(i)} \frac{1}{d_i} e - \frac{2e_i}{a_i} i\pi - \lambda/9 \left(\frac{d_i}{a_i} - 1\right)$$

wobei sich für $\omega = 0, 1, 2$ die zweifache Fallunterscheidung auf die Fälle $n \equiv \left.\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\} \bmod 3$ bezieht.

Wir entnehmen aus (9) folgendes:

1) In der Ecke $\omega = i\infty$ des Fundamental-Polygons sind sämtliche N Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ endlich und von null verschieden.

2) In den drei andern Ecken des Fundamental-Polygons sind diese N Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ stets zu einem Teil null und zu einem Teil unendlich (ausserdem, wenn n eine Quadratzahl ist, noch zu einem Teil endlich und $\gtrless 0$).

Die hiermit gefundenen Null- und Unendlichkeitspunkte der Wurzeln sind nach I. § 6. die einzigen im Fundamental-Polygon 3ter Stufe.

§ 4. *Form der Coefficienten, Aufstellung der Gleichungen.*

Betreffs der Form der Coefficienten haben wir zunächst die allgemeine Betrachtung von pag. 17. etc. auf Congruenz-Moduln $\psi_{(\omega)}$ in Anwendung zu bringen, welche in Bezug auf 3te Einheitswurzeln der 3ten Stufe adjungirt sind. Es genügt, nur diesen allgemeinen Fall, welcher $n \equiv 2 \bmod 3$ entspricht, zu behandeln, da der specielle Fall der Coefficienten 3ten Stufe, welcher $n \equiv 1 \bmod 3$ entspricht, damit bereits erledigt ist.

Wir setzen an

$$[\psi_{(\omega)}]^3 = R_{(\xi)}$$

Daraus folgt, da $\psi_{(\omega)}$ als eindeutige Function von ω nur in $\omega = i\omega$, 0, 1, 2 verzweigt sein kann:

$$(10) \quad \psi(\omega) = (\sqrt[3]{\xi})^{\alpha} (\sqrt[3]{\xi+2})^{\beta} \sqrt[3]{(\xi+2\varepsilon)^{\gamma}} \, (\sqrt[3]{\xi+2\varepsilon^2})^{\delta} R(\xi)$$

unter α, β, γ, δ ganze Zahlen verstanden. Die Grössen $\sqrt[3]{\xi}$, $\sqrt[3]{\xi+2\varepsilon^i}$ einzeln sind jedoch keine Congruenz-Moduln, sondern nur ihre Verhältnisse sind nach (6) solche. Damit das angeschriebene $\psi_{(\omega)}$ ein Congruenz-Modul wird, ist also notwendig und hinreichend:

$$(10b) \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 0 \bmod 3$$

zu nehmen oder wir haben den letzten Ansatz etwa in

$$(11) \quad \psi_{(\omega)} = \left(\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}\right)^{p} \left(\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}\right)^{q} \left(\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}}\right)^{r} R(\xi)$$

zu specialisiren, um hierin die allgemeinste Darstellung eines eindeutigen Congruenz-Moduls zu haben, der der 3ten Stufe in Bezug auf 3te Einheitswurzeln adjungirt ist. Wir beschränken, wie dies zulässig ist, die Werte von p, q, r auf 0, 1, 2. Um aber die Darstellung (11) vollkommen eindeutig zu machen, haben wir noch festzusetzen, wie die 3ten Wurzeln aus $\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^i}$ gezogen werden sollen. Dies geschieht sehr einfach, wenn wir auf die Relationen (6) zurückgreifend definiren:

$$\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} = +\frac{1}{\sqrt[3]{-i\sqrt{3}}}\,\frac{\sigma_{10}}{\sigma_{01}}$$

(12)
$$\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} = +\frac{1}{\sqrt[3]{-i\sqrt{3}}}\,\frac{\sigma_{10}}{\sigma_{11}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{-i\sqrt{3}}}\,\frac{\sigma_{10}}{\sigma_{11}}$$

unter $\sqrt[3]{-i\sqrt{3}}$ in allen drei Fällen dieselbe 3te Wurzel verstanden.

Im Anschluss an diese Definitionen stellen wir das Verhalten der drei Moduln bei Ausübung von S und T tabellarisch zusammen, und zwar ist dies nach (1) so beschaffen:

(13)

$S)$	$\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}$	$+\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}$	$\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}$
			$+\varepsilon\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}}$
$T)$	$-\frac{1}{(\sqrt[3]{-i\sqrt{3}})^2}\sqrt[3]{\frac{\xi+2}{\xi}}$	$+\frac{1}{\sqrt[3]{-i\sqrt{3}}}\sqrt[3]{\frac{\xi+2}{\xi+2\varepsilon^2}}$	$\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}}$
			$+\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}$
			$-\frac{1}{\sqrt[3]{-i\sqrt{3}}}\sqrt[3]{\frac{\xi+2}{\xi+2\varepsilon}}$

Weiteren Aufschluss als durch (11) über die Form der Coefficienten erhalten wir durch die Transformationen der Gleichungen in sich. Um mit Hilfe deren zunächst die Exponenten p, q, r in (11) zu bestimmen, bringen wir lineare Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 in Anwendung, welche mod 3 zur Identität congruent sind, weil nämlich dadurch $R(\xi)$ in (11) nicht geändert wird. Die erzeugenden Substitutionen dieser Untergruppe sind S^3, TS^3T, $S^{-1}TS^3TS^{+1}$,

$S^{+1}TS^3TS^{-1}$; wir erhalten dafür, indem wir uns von den $x_{\lambda\mu}$ wieder auf x_{10} und dafür weiter auf den allgemeinen Fall $n \equiv 2 \bmod 3$ beschränken:

(14)

	x_{10}
$S^3)$	x_{10}
$TS^3T)$	$\varepsilon^2 x_{10}$
$S^{-1}TS^3TS^{+1})$	$\varepsilon^2 x_{10}$
$S^{+1}TS^3TS^{-1})$	$\varepsilon^2 x_{10}$

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \\
\hline
\varepsilon\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} & \varepsilon\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} & \varepsilon\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \\
\hline
\varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \\
\hline
\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} & \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \\
\hline
\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} & \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \\
\hline
\end{array}$$

Daraus ist ersichtlich, dass ein Coefficient $\psi_{10}{}^{(\nu)}(\omega)$, welcher einer homogenen symmetrischen Function νten Grades der Wurzeln $x_{10}{}^{(i)}$ entspricht, die Form hat:

$$\psi_{10}{}^{(\nu)}(\omega) = \left\{\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}\ \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}\ \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}}\right\}^{\nu'} R(\xi) \tag{15}$$

sofern $\nu = \nu' + 3\nu''$ gesetzt und ν' auf die Werte 0, 1, 2 beschränkt wird.

Um nunmehr auch Aufschluss über die Form von $R(\xi)$ zu erhalten, benutzen wir die pag. 45. angegebenen Transformationen der Gleichungen in sich, welche von linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 herrühren, die nicht mod 3 zur Identität congruent sind. Diese beiden Substitutionen S und S^2 bringen folgende Aenderungen hervor:

(16)

	x_{10}	$\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}\ \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}\ \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}}$	ξ
S	x_{10}	$\varepsilon\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}\ \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}\ \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}}$	$\varepsilon\xi$

(16) $S^2 \qquad x_{10} \qquad \varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}\ \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}\ \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \qquad \varepsilon^2.\xi$

Um daraus den gewünschten Schluss ziehen zu können, wollen wir beachten, dass es 12 mod 3 incongruente nicht-homogene lineare Substitutionen von ω_1, ω_2 giebt. Diese sind:

(17a) $\qquad S^i, \quad TS^i, \quad STS^i, \quad S^2TS^i, \quad i = 0, 1, 2.$

Ihnen entsprechen folgende 12 lineare Substitutionen der Tetraeder-Irrationatität ξ oder folgende Substitutionen der Tetraeder-Gruppe:

(17b) $\qquad \varepsilon^i.\xi, \quad \varepsilon^i.\frac{\xi+2}{\xi-1}, \quad \varepsilon^i.\frac{\varepsilon\xi+2}{\varepsilon\xi-1}, \quad \varepsilon^i.\frac{\varepsilon^2\xi+2}{\varepsilon^2\xi-1}.$

wobei i denselben Wert hat wie in der symbolischen Schreibweise $S^k T^l S^i$ der linearen Substitution.

Aus diesen Angaben geht hervor, dass $\varepsilon^i.\xi$ die einzigen Tetraeder-Substitutionen sind, welche sich bei Ausübung von S um ε ändern. Daher folgt aus (16):

(18) $\qquad \psi_{10}{}^{(r)}(\omega) = \left\{\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}\ \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}\ \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}}\ \frac{1}{\xi}\right\}^{r'}.R(\xi^3).$

An letzter Stelle achten wir schliesslich auf die Null- und Unendlichkeitspunkte der Wurzeln, welche in (9) angegeben worden sind. Die Lage derselben lässt sich, indem wir auf die Tetraeder-Substitutionen Bezug nehmen, so beschreiben: Die Wurzeln werden null und unendlich nur für unendlich grosse $\varepsilon^k.\frac{\xi-1}{\xi+2}$, $\varepsilon^l.\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}$, $\varepsilon^m.\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+2}$ und $\sqrt[3]{\frac{1}{\xi^3+8}}$. Daraus folgt, dass, wenn man die Gleichung für x_{10} so anschreibt, dass die höchste Potenz den Coefficienten 1 hat, einesteils

(18b) $\qquad R(\xi^3) = G\left\{\varepsilon^k.\frac{\xi-1}{\xi+2}, \quad \varepsilon^l.\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}, \quad \varepsilon^m.\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+1}\right\}$

sein muss, worin G eine ganze Function der drei Argumente und k, l, m beliebig 0, 1 oder 2 bedeuten, und dass andernteils das constante Glied der Gleichung unabhängig von ξ, also eine Constante ist, welche daher unmittelbar nach (9) angegeben werden kann. Die Frage ist nach (18b) nunmehr, wie eine ganze Function der drei Argumente $\frac{\xi-1}{\xi+2}, \frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}, \frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi-2}$ (indem wir einfach $k = l = m = 0$

setzen) beschaffen sein muss, damit sie eine rationale Function von ξ^3 ist oder, was dasselbe ist, damit sie ungeändert bleibt, wenn man ξ durch $\varepsilon\xi$ ersetzt. Da durch Vertauschung von ξ mit $\varepsilon\xi$ die genannten Argumente wechselseitig in einander übergehen, muss die ganze Function G eine symmetrische ganze Function der drei Argumente sein. Als solche ist sie eine ganze Function der drei symmetrischen Functionen

$$\frac{\xi-1}{\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+2},$$

$$\frac{\xi-1}{\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}\cdot+\frac{-1}{\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+2}+\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+2},$$

$$\frac{\xi-1}{\xi+2}+\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}+\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+2}$$

jener drei Argumente. Jede dieser drei symmetrischen Functionen hat die Form $\frac{A\xi^3+B}{\xi^3+8}$; folglich drücken sich zwei derselben stets durch die dritte, oder alle drei drücken sich ganz durch

$$27\cdot\frac{\xi}{\xi+2}\cdot\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}\cdot\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}=27\cdot\frac{\xi^3}{\xi^3+8}$$

aus, d. h. die gesuchte symmetrische ganze Function von $\frac{\xi-1}{\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+2}$ ist eine ganze Function etwa von $27\cdot\frac{\xi^3}{\xi^3+8}$. Die definitive Form der Coefficienten $\psi_{10}{}^{(\nu)}(\omega)$ wird daher:

$$(19)\quad \psi_{10}{}^{(\nu)}(\omega)=\left\{3\cdot\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}}\cdot\frac{1}{\xi}\right\}^{\nu'}\cdot G\left\{27\cdot\frac{\xi^3}{\xi^3+8}\right\},$$

oder wenn wir

$$(20)\quad X_{10}=3\sqrt[3]{\frac{\xi^3}{\xi^3+8}}$$

setzen:

$$(19a)\quad \psi_{10}{}^{(\nu)}(\omega)=\left(X_{10}\cdot\frac{1}{\xi}\right)^{\nu'}G(X_{10}{}^3)$$

Damit ist die allgemeine Discussion der Coefficienten für die Gleichung für x_{10} zu Ende geführt.

Um auf Grund dessen die Form der Coefficienten für die drei andern simultanen Gleichungen anzugeben, hat man mittelst der Tabelle (8) aufzusuchen, durch welche Operationen die Gleichung für x_{10} in die Gleichung für x_{01}, x_{11}, x_{12} übergeführt wird, und diese Operationen unter Benutzung von (17a), (17b) auf (19a) auszuüben. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, und weil wir bei den Beispielen ohnehin die sämtlichen simultanen Gleichungen aufstellen werden, möge es genügen, die dabei auftretenden Argumente X_{01}, X_{11}, X_{12} namhaft zu machen und das Verhalten der X_{10} bei Ausübung von S und T zusammenzustellen.

(21)

	S	T
$X_{01} = \frac{3}{(\sqrt[3]{-i\sqrt{3}})^4} \sqrt[3]{\frac{(\xi+2)^3}{\xi(\xi+2\varepsilon)(\xi+2\varepsilon^2)}}$	$\varepsilon . X_{11}$	X_{10}
$X_{10} = 3 \sqrt[3]{\frac{\xi^3}{\xi^3+8}}$	$\varepsilon . X_{10}$	X_{01}
$X_{11} = \frac{3}{(\sqrt[3]{-i\sqrt{3}})^4} \sqrt[3]{\frac{(\xi+2\varepsilon)^3}{\xi(\xi+2)(\xi+2\varepsilon^2)}}$	X_{12}	X_{12}
$X_{12} = \frac{3}{(\sqrt[3]{-i\sqrt{3}})^4} \sqrt[3]{\frac{(\xi+2\varepsilon^2)^3}{\xi(\xi+2)(\xi+2\varepsilon)}}$	$\varepsilon . X_{01}$	X_{11}

Beispielsweise ist also:

$$\psi_{01}^{(\nu)}(\omega) = \left(X_{01} \cdot \frac{\xi-1}{\xi+2}\right)^{\nu'} . G(X_{01}^3). \tag{19b}$$

Nachdem wir durch diese Erörterungen die Form der Coefficienten im allgemeinen Falle, d. h. im Falle $n \equiv 2 \bmod 3$ und $\nu \equiv 1, 2 \bmod 3$, sowie im speciellen Falle $n \equiv 2$, $\nu \equiv 0 \bmod 3$ bestimmt haben, bleibt es nur noch übrig, die specielle Form der Coefficienten im andern der beiden pag. 46. angeführten speciellen Fälle, nämlich im Falle $n \equiv 1 \bmod 3$ anzugeben. Der Unterschied zwischen diesem Falle und dem allgemeinen Falle besteht lediglich darin, dass die Coefficienten von der 3ten Stufe sind. Es fällt daher einfach in der Darstellung der Coefficienten durch ξ der Factor in (19a), (19b) etc. fort, welcher der 3ten Stufe adjungirt ist. Die Coefficienten haben somit für $n \equiv 1 \bmod 3$ die Form:

(22)

$$\begin{aligned} \chi_{01} &= G(X_{01}^3), \\ \chi_{10} &= G(X_{10}^3), \\ \chi_{11} &= G(X_{11}^3), \\ \chi_{12} &= G(X_{12}^3). \end{aligned}$$

Der Grad der rationalen ganzen Functionen G in $X_{\lambda\mu}{}^3$ lässt sich, genau wie im Falle $s = 2$, dadurch bestimmen, dass man, wenn es sich beispielsweise um die Gleichung für x_{10} handelt, nach (9) das erste Glied der Reihen-Entwicklung des betreffenden Coefficienten im Punkte $\omega = 0$ oder $\omega = 1$ oder $\omega = 2$ angeben kann, und dass in diesen drei Punkten die Reihen-Entwickelung von X_{10} und von $X_{10} \cdot \frac{1}{\xi}$ beginnt:

$$(23) \quad X_{10} = C.q^{-4/9}, \quad X_{10} \cdot \frac{1}{\xi} = C.q^{-2/9}$$

Bei Benutzung aller der abgeleiteten Eigenschaften unserer Multiplicator-Gleichungen ist man nunmehr, ganz entsprechend wie früher im Falle $s = 2$, im Stande, irgend eine der einem bestimmten Transformationsgrade n zugehörigen Gleichungen mit einer gewissen Anzahl von unbestimmten Constanten anzuschreiben. Damit ist das Ziel der allgemeinen Theorie unserer Multiplicator-Gleichungen 3ter Stufe erreicht.

Ueber die Bestimmung der erwähnten unbestimmten Constanten ist dasselbe zu bemerken, wie an der entsprechenden Stelle im Falle $s = 2$ (Schluss des § 4.). Die Reihenentwickelungen der Grössen $X_{\lambda\mu}$ nach q erhält man, indem man dieselben mittels (12) durch die $\sigma_{\lambda\mu}$ ausdrückt, deren Reihen-Entwickelungen durch I. (27) gegeben sind. Z. B. ist:

$$X_{01} = -i\sqrt{3}.\varepsilon\frac{\sigma_{01}{}^3}{\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12}}, \quad X_{10} = -i\sqrt{3}.\varepsilon\frac{\sigma_{10}{}^3}{\sigma_{01}\sigma_{11}\sigma_{12}}.$$

§ 5. *Beispiele:* $n = 2, 4, 5, 7.$

$n = 2.$

Wir behandeln im Anschluss an unsere Entwickelungen in § 4. die eine Gleichung für die $x_{10}{}^{(i)}$ auf directem Wege.

Die Grössen a_i, $9c_i$, d_i im kanonischen Repräsentantensystem $\frac{a_i\omega_1}{n}$, $\frac{9c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}$ für die drei Wurzeln werden:

	a_i	$9c_i$	d_i
1)	1	0	2
2)	2	0	1
3)	2	9.1	1

und demnach wird entsprechend weiter

	A_i	B_i	C_i	$D_i \bmod 9$
1)	2	0	0	5
2)	1	0	0	1
3)	1	0	0	1.

Davon haben nur die beiden letzten Substitutionen die Determinante 1. Die Determinante der ersten ist dagegen nur $\equiv 1 \bmod 9$; wir haben daher die erste Substitution zuvörderst durch Modification der Substitutions-Coefficienten mod 9 in eine lineare Substitution zu verwandeln, welche die Determinante hat. Dies ist (2, 9, 9, 41) oder bequemer mod 18 vereinfacht (2, 9, 9, 8). Dieselbe hat zur Folge:

$$\sigma_{10}' = \sigma_{2,9} = \sigma_{2,0+3.3} = -\sigma_{10}$$

Die drei Wurzeln sind also:

$$x_{10}^{(1)} = -\frac{\sigma_{10}\left\{\frac{\omega_1}{2},\ \omega_2\right\}}{\sigma_{10}}, \quad x_{10}^{(2)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1,\ \frac{\omega_2}{2}\right\}}{\sigma_{10}}$$

$$x_{10}^{(3)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1,\ \frac{9\omega_1+\omega_2}{2}\right\}}{\sigma_{10}}$$

Für $\omega = 0, 1, 2$ verhalten sich dieselben nach (9) in erster Annäherung wie

$$x_{10}^{(1)} = C.q^{-2/9}, \quad x_{10}^{(2)} = C.q^{+1/9}, \quad x_{10}^{(3)} = C.q^{+1/9} \quad \text{für } q = 0.$$

Wir entnehmen daraus mit Bezug auf (19a) und (23), dass nur die eine symmetrische Function $\Sigma x_{10}^{(i)}$ der drei Wurzeln von X_{10} abhängt und zwar in folgender Weise:

$$-\Sigma x_{10}^{(i)} = C.X_{10}\cdot\frac{1}{\xi}.$$

Von den particulären Gleichungen für die Ecken des Fundamental-Polygons interessirt uns nur die eine für $\omega = i\infty$ oder für $X_{10} = -9q^{2/3}$, $X_{10}\cdot\frac{1}{\xi} = +\frac{3}{2}$, welche endliche und von null verschiedene Wurzeln hat. Sie ist:

$$(x_{10}+\tfrac{1}{2})(x_{10}-1)^2 = x_{10}^3 - \tfrac{3}{2}x_{10}^2 + \tfrac{1}{2} = 0.$$

Daher erhalten wir sofort als allgemeine Gleichung ohne jede unbestimmte Constante:

$$x_{10}^3 - X_{10} \cdot \frac{1}{\xi} x_{10}^2 + \tfrac{1}{2} = (x_{10} + \tfrac{1}{2})(x_{10} - 1)^2 + \left(\binom{3}{2} - X_{10} \cdot \frac{1}{\xi}\right) x_{10}^2 = 0.$$

Durch Ausübung der Operation T erhalten wir daraus:

$$x_{01}^3 + X_{01} \cdot \frac{\xi - 1}{\xi + 2} \cdot x_{01}^2 - \tfrac{1}{2} = 0$$

Durch Ausübung der Operation S auf diese neue Gleichung entsteht weiter:

$$x_{12}^3 - \varepsilon X_{11} \cdot \frac{\varepsilon\xi - 1}{\varepsilon\xi + 2} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}} \cdot x_{12}^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_{11}^3}{\sigma_{12}^3} = 0.$$

Schliesslich ergiebt die Ausübung der Operation T auf diese letztere Gleichung als letzte der vier simultanen Gleichungen:

$$x_{11}^3 - \varepsilon^2 X_{12} \cdot \frac{\varepsilon^2\xi - 1}{\varepsilon^2\xi + 2} \cdot \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} \cdot x_{11}^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_{12}^3}{\sigma_{11}^3} = 0.$$

$$n = 4.$$

Es wird für die sechs Wurzeln:

	a_i	$9c_i$	d_i	A_i	B_i	C_i	D_i mod 9
1)	1	0	4	4	0	0	7
2)	2	9.1	2	2	0	0	5
3)	4	0	1	1	0	0	1
			folglich:				
4)	4	9.1	1	1	0	0	1
5)	4	9.2	1	1	0	0	1
6)	4	9.3	1	1	0	0	1

Die zwei ersten dieser 6 linearen Substitutionen A_i, B_i, C_i, D_i müssen zuvörderst durch Modification mod 9 auf die Determinante $A_i D_i - B_i C_i = 1$ gebracht werden, und zwar ist:

$$(4, 0, 0, 7) \equiv (-41, 9, -2) \text{ mod } 9$$

oder in zulässiger Weise mod 18 vereinfacht: $(-5, 5, 9, 9, -2)$. Die Substitution $(2, 0, 0, 5)$ ist bereits im Beispiel $n = 2$ behandelt worden. Die Substitution $(-5, 9, 9, -2)$ verwandelt σ_{10} in

$$\sigma_{10}' = \sigma_{-5,9} = \sigma_{10}$$

und sonach sind die 6 Wurzeln folgende:

$$x_{10}^{(1)} = + \frac{\sigma_{10}\left\{\frac{\omega_1}{4}, \omega_2\right\}}{\sigma_{10}}, \qquad x_{10}^{(4)} = + \frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{9\omega_1 + \omega_2}{4}\right\}}{\sigma_{10}}$$

$$x_{10}^{(2)} = -\frac{\sigma_{10}\left\{\frac{\omega_1}{2}, \frac{9\omega_1+2\omega_2}{4}\right\}}{\sigma_{10}}, \qquad x_{10}^{(5)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{9.2\omega_1+\omega_2}{4}\right\}}{\sigma_{10}}$$

$$x_{10}^{(3)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{\omega_2}{4}\right\}}{\sigma_{10}}, \qquad x_1{}^{0(6)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{9.3\omega_1+\omega_2}{4}\right\}}{\sigma_{10}}$$

Für $\omega = 0, 1, 2$ verhalten sie sich nach (9) in erster Annäherung wie

$$\left.\begin{aligned} x_{10}^{(1)} &= C.q^{-2/3} \\ x_{10}^{(2)} &= \text{Const} \\ x_{10}^{(3)} &= x_{10}^{(4)} = x_{10}^{(5)} = x_{10}^{(2)} = C.q^{+1/6} \end{aligned}\right\} \text{ für } q = 0.$$

Mit Bezug auf (22) und (23) erfahren wir daraus, dass nur die beiden ersten symmetrischen Functionen $\Sigma x_{10}^{(i)}$, $\Sigma\Sigma x_{10}^{(i)} x_{10}^{(k)}$ von $X_{10}^{(3)}$ abhangen und zwar linear.

Für die Ecke $\omega = i\infty$ des Fundamental-Polygons sind sämtliche 6 Wurzeln endlich und von null verschieden; da n Quadrat-Zahl ist, ist dies auch für die drei andern Ecken $\omega = 0, 1, 2$, mit einer Wurzel der Fall. Daher benutzen wir, um die Zahl der in die allgemeine Gleichung eingehenden zunächst unbestimmten Constanten nach Möglichkeit zu reduciren, sämtliche vier particuläre Gleichungen. Dieselben sind für

$$\omega = i\infty, \text{ d. h. } X_{10}^3 = 0, \quad (x_{10}-\tfrac{1}{4})(x_{10}+\tfrac{1}{2})(x_{10}-1)^4 = x_{10}^6 - \frac{15}{4}x_{10}^5 + \frac{39}{8}x_{10}^4 - 2x_{10}^3 - \frac{3}{4}x_{10}^2 + \frac{3}{4}x_{10} - \frac{1}{8} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 0 \\ \omega &= 1 \\ \omega &= 2 \end{aligned}\right\} \text{ d. h. } X_{10}^3 = \infty, \quad (x_{10}-\tfrac{1}{2})x_{10}^4 = 0$$

Daher erhalten wir für die allgemeine Gleichung folgenden Ansatz mit einer unbestimmten Constanten:

$$(x_{10}-\tfrac{1}{4})(x_{10}+\tfrac{1}{2})(x_{10}-1)^4 + A X_{10}^3 (x_{10}-\tfrac{1}{2})x_{10}^4 = 0.$$

Um A zu bestimmen, wollen wir einfacher die Gleichung für x_{10} heranziehen. Wir erhalten sie aus der angeschriebenen für x_{10} durch Anwendung der linearen Substitution T der Perioden ω_1, ω_2 und zwar wird sie:

$$(x_{01}-\tfrac{1}{4})(x_{01}+\tfrac{1}{2})(x_{01}-1)^4 + A.X_{01}^3(x_{01}-\tfrac{1}{2})x_{01}^4 = 0.$$

Wir benutzen dafür:

$$\sigma_{01} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} \cdot q^{-2/9}\left\{1 - q^{2/3} + \ldots\right\}$$

$$x_{01}^{(1)} = \frac{\sigma_{01}\left\{\frac{\omega_1}{4}, \omega_2\right\}}{\sigma_{01}} = \tfrac{1}{4} q^{-2/3}\left\{1 + q^{2/3} + \ldots\right\}$$

$$X_{01}^3 = -q^{-2/3}\left\{1 - 12q^{2/3} + \ldots\right\}$$

Damit bilden wir:

$$(x_{01}^{(1)})^6 = +\frac{1}{4^6} q^{-4}\left\{1 + 6q^{2/3} + \ldots\right\}$$

$$-\frac{15}{4}(x_{01}^{(1)})^5 = -\frac{15}{4^6} q^{-10/3}\left\{1 + \ldots\right\}$$

$$+AX_{01}^3 (x_{01}^1)^5 = -\frac{A}{4^5} \cdot q^{-4}\left\{1 - 7q^{2/3} + \ldots\right\}$$

$$-\frac{A}{2} X_{01}^3 (x_{01}^{(1)})^4 = +\frac{A}{2 \cdot 4^4} \cdot q^{-10/3}\left\{1 + \ldots\right\}$$

und erhalten mit einer Verification $A = +\frac{1}{4}$. Somit werden die vier simultanen Gleichungen:

$$(x_{01} - \tfrac{1}{4})(x_{01} + \tfrac{1}{2})(x_{01} - 1)^4 + \tfrac{1}{4} X_{01}^3 (x_{01} - \tfrac{1}{2}) x_{01}^4 = 0,$$

$$(x_{10} - \tfrac{1}{4})(x_{10} + \tfrac{1}{2})(x_{10} - 1)^4 + \tfrac{1}{4} X_{10}^3 (x_{10} - \tfrac{1}{2}) x_{10}^4 = 0,$$

$$\left(x_{11} - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)\left(x_{11} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)(x_{11} - \varepsilon^2)^4 + \frac{\varepsilon^2}{4} X_{11}^3 \left(x_{11} - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) x_{11}^4 = 0,$$

$$\left(x_{12} - \frac{\varepsilon}{4}\right)\left(x_{12} + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{12} - \varepsilon)^4 + \frac{\varepsilon}{4} X_{12}^3 \left(x_{12} - \frac{\varepsilon}{2}\right) x_{12}^4 = 0.$$

$$n = 5.$$

Man hat für die 6 Wurzeln:

	a_i	$9c_i$	d_i		A_i	B_i	C_i	D_i
1)	1	0	5		5	0	0	2
2)	5	0	1		1	0	0	1
3)	5	9.1	1		1	0	0	1
				folglich:				
4)	5	9.2	1		1	0	0	1
5)	5	9.3	1		1	0	0	1
6)	5	9.4	1		1	0	0	1

Wir beachten, dass

$$(5, 0, 0, 2) \equiv (41, 9, 9, 2) \bmod 9$$
$$(41, 9, 9, 2) \equiv (5, 9, 9, 2) \bmod 18$$
$$\sigma_{10}(5, 9, 9, 2) = -\sigma_{10}$$

und also

$$x_{10}^{(1)} = -\frac{\sigma_{10}\left\{\frac{\omega_1}{5}, \omega_2\right\}}{\sigma_{10}}, \quad x_{10}^{(4)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{9.2\omega_1+\omega_2}{5}\right\}}{\sigma_{10}}$$

$$x_{10}^{(2)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{\omega_2}{5}\right\}}{\sigma_{10}}, \quad x_{10}^{(5)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{9.3\omega_1+\omega_2}{5}\right\}}{\sigma_{10}}$$

$$x_{10}^{(3)} = +\frac{\sigma_{01}\left\{\omega_1, \frac{9\omega_1+\omega_2}{5}\right\}}{\sigma_{10}}, \quad x_{10}^{(6)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{9.4\omega_1+\omega_2}{5}\right\}}{\sigma_{10}} \text{ ist.}$$

Für $\omega = 0, 1, 2$ verhalten sich die Wurzeln wie

$$\left.\begin{aligned} x_{10}^{(1)} &= C.q^{-8/9} \\ x_{10}^{(k)} &= C.q^{+8/45}, \quad k = 2, \ldots 6 \end{aligned}\right\} \text{ für } q = 0,$$

Da nun die symmetrischen Functionen der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ die Form (19a) haben sollen, so folgt daraus mit Bezug auf das unter (23) angegebene Verhalten von X_{10} und $X_{10} \cdot \frac{1}{\xi}$ für dieselben drei Punkte:

$$-\Sigma x_{10}^{(i)} = c_1 = X_{10} \cdot \frac{1}{\xi} \cdot G_1(X_{10}^3),$$

$$+\Sigma\Sigma x_{10}^{(i)} x_{10}^{(k)} = c_2 = C.\left(X_{10} \cdot \frac{1}{\xi}\right)^2,$$

$$-\Sigma\Sigma\Sigma x_{10}^{(i)} x_{10}^{(k)} x_{10}^{(l)} = c_3 = C, \quad c_4 = C.X_{10} \cdot \frac{1}{\xi}, \quad c_5 = C,$$

wobei G_1 eine ganze Function 1ten Grades andeuten soll.

Bilden wir ferner noch die particuläre Gleichung für $\omega = i\infty$ nämlich:

$$\left(x_{10} + \frac{1}{5}\right)(x_{10}-1)^5 = x_{10}^6 - \frac{24}{5} x_{10}^5 + 9x_{40}^4 - 8x_{10}^3 + 3x_{10}^2 - \ldots - \frac{1}{5} = 0,$$

so folgt für die allgemeine Gleichung folgender Ansatz mit einer unbestimmten Constanten:

$$x_{10}+X_{10}\frac{1}{\xi}\left(-\frac{16}{5}+AX_{10}^{3}\right)x_{10}^{5}+4\left(X_{10}\ \frac{1}{\xi}\right)^{2}x_{10}^{4}-8x_{10}^{3}$$
$$+2X_{10}\cdot\frac{1}{\xi}x_{10}^{2}-\ldots-\frac{1}{5}=0.$$

Nach Bestimmung von A werden die vier simultanen Gleichungen:

$$x_{10}^{6}+X_{10}\cdot\frac{1}{\xi}\left(-\frac{16}{5}+\frac{2}{5}X_{10}^{3}\right)x_{10}^{5}+4\left(X_{10}\ \frac{1}{\xi}\right)^{2}x_{10}^{4}-8x_{10}^{3}$$
$$+2X_{10}\frac{1}{\xi}x_{10}^{2}-\ldots-\frac{1}{5}=0,$$

$$x_{01}^{6}-X_{01}\cdot\frac{\xi-1}{\xi+2}\left(-\frac{16}{5}+\frac{2}{5}X_{01}^{3}\right)x_{01}^{5}+4\left(X_{01}\ \frac{\xi-1}{\xi+2}\right)^{2}x_{01}^{4}+8x_{01}^{3}$$
$$+2X_{01}\ \frac{\xi-1}{\xi+2}x_{01}^{2}-\ldots-\frac{1}{5}=0,$$

$$x_{11}^{6}+X_{12}\cdot\frac{\varepsilon^{2}\xi-1}{\varepsilon^{2}\xi+2}\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\left(-\frac{16}{5}+\frac{2}{5}X_{12}^{3}\right)x_{11}^{5}+4\left(X_{12}\ \frac{\varepsilon^{2}\xi-1}{\varepsilon^{2}\xi+2}\cdot\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\right)^{2}x_{11}^{4}$$
$$-8\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\right)^{3}x_{11}^{3}+2X_{12}\ \frac{\varepsilon^{2}\xi-1}{\varepsilon^{2}\xi+2}\cdot\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\right)^{4}x_{11}^{2}-\ldots-\frac{1}{5}\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\right)^{6}=0,$$

$$x_{12}^{6}+X_{11}\cdot\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\left(-\frac{16}{5}+\frac{2}{5}X_{11}^{3}\right)x_{12}^{5}+4\left(X_{11}\cdot\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}\cdot\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\right)^{2}x_{12}^{4}$$
$$-8\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\right)^{3}x_{12}^{3}+2X_{11}\ \frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\right)^{4}x_{12}^{2}-\ldots-\frac{1}{5}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\right)^{6}=0.$$

$n=7.$

Der allgemeine Ansatz hat 5 zunächst unbestimmte Constanten, lautet nämlich z. B. für x_{10}:

$$(x_{10}-\tfrac{1}{7})(x_{10}-1)^{7}+X_{10}^{3}(A+BX_{10}^{3})x_{10}^{7}+X_{10}^{3}(Cx_{10}^{2}+Dx_{10}+E)x_{10}^{4}=0$$

Nach Bestimmung von A, B, C, D, E sind die simultanen Gleichungen:

$$\left(x_{01}-\frac{1}{7}\right)(x_{01}-1)^{7}+\frac{1}{7}X_{01}^{3}(25-X_{01}^{3})x_{01}^{7}+X_{01}^{3}(2x_{01}^{2}-4x_{01}+1)x_{01}^{4}=0,$$

$$\left(x_{10}-\frac{1}{7}\right)(x_{10}-1)^{2}+\frac{1}{7}X_{10}^{3}(25-X_{10}^{3})x_{10}^{7}+X_{10}^{3}(2x_{10}^{2}-4x_{10}+1)x_{10}^{4}=0.$$

$$\left(x_{11}-\frac{\varepsilon}{7}\right)(x_{11}-\varepsilon)^7+\frac{\varepsilon}{7}X_{11}{}^3(25-X_{11}{}^3)x_{11}{}^7+\varepsilon^2X_{10}{}^3(2x_{10}{}^2-4\varepsilon x_{11}+\varepsilon^2)x_{11}{}^4=0,$$

$$\left(x_{12}-\frac{\varepsilon^2}{7}\right)(x_{12}-\varepsilon^2)^7+\frac{\varepsilon^2}{7}.X_{12}{}^3(25-X_{12}{}^3)x_{11}{}^7+\varepsilon.X_{12}{}^3(2x_{10}{}^2-4\varepsilon^2x_{12}+\varepsilon)x_{12}{}^4=0.$$

Drittes Capitel: $s=4$.

§ 1. *Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ mit der Oktaeder-Irrationalität.*

Betreffs des Verhaltens der $\sigma_{\lambda\mu}$ bei linearer Substitution der Perioden zunächst gilt hier folgendes:

a) Bei beliebigen linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 permutiren sich die $\sigma_{\lambda\mu}$ bis auf vortretende 8te Einheitswurzeln und aus irgend einem der sechs verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ lassen sich daher durch lineare Substitution der Perioden sämtliche sechs $\sigma_{\lambda\mu}$ und nur diese ableiten.

Dies geht auch aus dem Verhalten der $\sigma_{\lambda\mu}$ bei Ausübung von S und T hervor; legen wir als die sechs verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$

$$\sigma_{01},\quad \sigma_{10},\quad \sigma_{11},\quad \sigma_{12},\quad \sigma_{13},\quad \sigma_{21}$$

zu Grunde, so lautet die betreffende Tabelle so:

		σ_{01}	σ_{10}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{21}
(1)	S)	$+\sigma_{11}$	$+\sigma_{10}$	σ_{21}	$e^{\frac{7i\pi}{4}}\sigma_{12}$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}\sigma_{01}$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}$
	T)	$+\sigma_{10}$	$-\sigma_{01}$	$e^{\frac{5i\pi}{4}}\sigma_{13}$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}\sigma_{21}$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}\sigma_{11}$	$e^{\frac{5i\pi}{4}}\sigma_{12}$.

b) In Bezug auf das Verhalten bei linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2, welche mod 2 zur Identität congruent sind, teilen sich die sechs $\sigma_{\lambda\mu}$ in drei Gruppen zu je zwei: σ_{01} und σ_{21}, ϱ_{10} und σ_{12}, σ_{11} und σ_{13}. Das Verhalten bei den Erzeugenden S^2 und TS^2T dieser Untergruppe ist nämlich folgendes:

		σ_{01}	σ_{10}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{21}
	S^2)	$+\sigma_{21}$	$+\sigma_{10}$	$e^{\frac{3i\pi}{2}}\sigma_{13}$	$e^{\frac{3i\pi}{2}}\sigma_{12}$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}\sigma_{11}$	$e^{\frac{5i\pi}{4}}\sigma_{01}$
(2)	TS^2T)	$-\sigma_{01}$	$e^{\frac{i\pi}{4}}\sigma_{12}$	$e^{\frac{i\pi}{4}}\sigma_{13}$	$-\sigma_{10}$	$-\sigma_{11}$	$e^{\frac{i\pi}{2}}\sigma_{21}$.

Daher bleiben die drei Producte $\sigma_{01}\cdot\sigma_{21}$, $\sigma_{10}\cdot\sigma_{12}$, $\sigma_{11}\cdot\sigma_{13}$ bei Substitution der genannten Untergruppe bis auf vortretende 8te Einheitswurzeln ungeändert.

c) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 4 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 8te Einheitswurzel, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind der vierten Stufe adjungirt.

d) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 8 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 4te Einheitswurzel.

e) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 16 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 2te Einheitswurzel.

f) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 32 zur Identität congruent sind, bleibt jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ ungeändert, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind von der 32ten Stufe.

g) Die Substitutions-Coefficienten von linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2, welche auf ein $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgeübt werden, dürfen beliebig mod 32 modificirt werden.

Auf Grund von b) können wir zunächst die $\sigma_{\lambda\mu}$ zu k^2 in Beziehung setzen. Nämlich die 8te Potenz jedes der beiden Quotienten aus den drei oben genannten Producten ist eine Modulfunction 2ter Stufe; es ist also etwa:

$$\left(\frac{\sigma_{01}\,\sigma_{21}}{\sigma_{15}\,\sigma_{12}}\right)^8 = R(k^2).$$

Um die rationale Function von k^2 auszuwerten, beachten wir, dass in erster Annäherung

(3) für $\omega - i\infty$ $\qquad \sigma_{01} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot q^{-3/16}$,

$$\sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

$$\sigma_{11} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\,e^{-\frac{3i\pi}{16}}\,q^{-\frac{3}{16}}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{i\pi}{8}} \cdot q^{-1/4}$$

$$\sigma_{13} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} \cdot e^{\frac{31i\pi}{16}} \cdot q^{-3/16}$$

$$\sigma_{21} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} \cdot e^{\frac{13i\pi}{8}} \cdot q^{-3/16}$$

also

$$\left(\frac{\sigma_{01} \cdot \sigma_{21}}{\sigma_{10} \cdot \sigma_{12}}\right)^8 = +\frac{1}{2^4} \cdot q^{-1} \quad \text{ist.}$$

Die Combination der Tabellen (1) und (3) ermöglicht es, die Werte der $\sigma_{\lambda\mu}$ für $\omega = 0$ und $\omega = 1$ anzugeben und auf Grund dessen findet man

$$\text{für } \omega = 0) \quad \left(\frac{\sigma_{01} \cdot \sigma_{21}}{\sigma_{10} \cdot \sigma_{12}}\right)^8 = +2^4 \cdot q,$$

sodass der Ausdruck in der 3ten Ecke $\omega = 1$ des Fundamental-Polygons 2ter Stufe endlich und von null verschieden sein muss. Damit gewinnen wir den Ansatz:

$$\left(\frac{\sigma_{01} \cdot \sigma_{21}}{\sigma_{10} \cdot \sigma_{12}}\right)^8 = C \cdot \frac{k^2 - 1}{k^2},$$

wofür durch Vergleich der beiderseitigen Reihen-Entwickelungen $C = -1$ folgt. Aus

$$\left(\frac{\sigma_{01} \cdot \sigma_{21}}{\sigma_{10} \cdot \sigma_{12}}\right)^8 = \frac{1 - k^2}{k^2}$$

folgt durch Ausführung der Operation S:

$$\left(\frac{\sigma_{11} \cdot \sigma_{13}}{\sigma_{10} \cdot \sigma_{12}}\right)^8 = -\frac{1}{k^2},$$

sodass die gewünschte Formelgruppe definitiv lautet:

(4) $$(\sigma_{01}\sigma_{21})^8 : (\sigma_{10}\sigma_{12})^8 : (\sigma_{11}\sigma_{13})^8 = (1 - k^2) : k^2 : -1.$$

Weiter können wir nach c) die $\sigma_{\lambda\mu}$ mit dem Hauptmodul für die 4te Stufe, mit der Octaeder-Irrationalität in Verbindung setzen. Wir legen als solche zu Grunde:

(5) $$o = q^{\frac{1}{8}} \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2k^2+2k}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2k^2}}$$ [1])

Sie zeigt bei Ausführung der linearen Substisutionen S und T der Perioden folgendes Verhalten:

(5b)

	S	T
0	$+i.o$	$\frac{1-o}{1+o}$

24 mod 4 incongruente lineare Substitutionen von ω sind gegeben durch

(6) S^h, TS^k, STS^k, S^2TS_k, S^3TS^k, TS^2TS^k, $k = 0, 1, 2, 3$

und die ihnen entsprechenden Octaeder-Substitutionen sind nach (5b):

(6b) $i^k.o$, $i^k.\frac{1-o}{1+o}$, $i^k.\frac{1-io}{1+io}$, $i^k.\frac{1+o}{1-o}$, $i^k.\frac{1+io}{1-io}$, $i^k.\frac{1}{o}$.

Aus der Definition (5), (5b) von o erhalten wir die Werte von o in den Ecken des Fundamental-Polygons 4ter Stufe, welche nach (6) bei geeigneter Wahl desselben $\omega = io$, 0, 1, 2, 3, $\frac{1}{2}$ sind. Dafür ist:

(7) $o(i\omega) = 0$, $o(0) = 1$, $o(+1) = +i$, $o(+2) = -1$,
$o(+3) = -i$, $o(+\frac{1}{2}) = \infty$.

Dies vorausgeschickt liefert c) den Ansatz:

$$\frac{\sigma\lambda\mu^8}{\sigma\lambda'\mu'^8} = R(o).$$

Es genügt, irgend einen dieser Quotienten zu behandeln; als solchen greifen wir $\frac{\sigma_{01}^8}{\sigma_{10}^8}$ heraus. Dieser Quotient verhält sich nach (1) in 6 Ecken des Fundamental-Polygons folgendermassen:

$o = 0)$ $\qquad \sigma_{01} : \sigma_{10}^8 = +\frac{1}{16} \cdot q^{-3/2}$

$o = 1)$ $\qquad = +16 . q^{3/2}$

---

1) Man vergleiche Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig 1884 pag. 132.

$$o = +i) \qquad \sigma_{01}{}^8 : \sigma_{10}{}^8 = -i$$

$$o = -1) \qquad = -q^{-1/2}$$

$$o = -i) \qquad = +i$$

$$o = \infty) \qquad = -q^{1/2}$$

bez. in erster Annäherung und an $q = 0$ gemessen. Dies Verhalten führt zu den Ansatz:

$$\sigma_{01}{}^8 : \sigma_{10}{}^8 = C \cdot \frac{(o-1)^3}{o^3(o+1)},$$

wofür sich, da für $\omega = i\infty$ in erster Annäherung

$$O = 2q^{1/2} \text{ ist,}$$

$$C = -\tfrac{1}{2} \text{ ergibt.}$$

Durch successive Ausführung der Operationen S und T erhält man schliesslich als vollständige Formel-Serie:

$$(8) \quad \sigma_{01}{}^8 : \sigma_{10}{}^8 : \sigma_{11}{}^8 : \sigma_{12}{}^8 : \sigma_{13}{}^8 : \sigma_{21}{}^8$$
$$= \frac{(1-O)^3}{1+O} : 2O^3 : +i \cdot \frac{(1-iO)^3}{1+iO} : -\frac{2}{O} : -i \cdot \frac{(1+iO)^3}{1-iO} : -\frac{(1+O)^3}{1-O}$$

Die Quotienten $\sigma_{\lambda\mu}{}^8 : \sigma_{\lambda'\mu'}{}^8$ sind also rationale Functionen vierten Grades von O.

Da für das Weitere die unter (6b) angegebenen linearen Substitutionen der Oktaeder-Irrationalität, die Oktaeder-Substitutionen, von fundamentaler Wichtigkeit sind, wollen wir nunmehr noch diese durch die $\sigma_{\lambda\mu}$ ausdrücken. Es geschieht dies jetzt einfach, wenn wir aus (8) etwa die Relation

$$O = \sqrt[4]{-1} \cdot \frac{\sigma_{10}{}^2}{\sigma_{12}{}^2}$$

entnehmen und darauf lineare Substitutionen in Anwendung bringen. Dies giebt nach eindeutiger Bestimmung von $\sqrt[4]{-1}$:

$$(9) \quad O = e^{\frac{3i\pi}{4}} \cdot \frac{\sigma_{10}{}^2}{\sigma_{12}{}^2}, \quad \frac{1-O}{1+O} = e^{\frac{5i\pi}{4}} \cdot \frac{\sigma_{01}{}^2}{\sigma_{21}{}^2}, \quad \frac{1-iO}{1+iO} = e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \frac{\sigma_{11}{}^2}{\sigma_{13}{}^2}.$$

§ 2. *Die $x\lambda_\mu^{(i)}$. Ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Die Transformationen der Gleichungen in sich.*

Wir nehmen nunmehr Transformation $n$ter Ordnung vor, wobei n als ungerade vorausgesetzt wird. Für das eine Repräsentanten-System:

$$\overline{\omega}_1{}^{(i)} = \alpha_i . \omega_1 + \beta_i . \omega_2, \quad \overline{\omega}_2{}^{(i)} = \frac{\gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2}{n},$$

$$\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots N$$

sind die linearen Substitutionen der Perioden $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i)$ mod 32 zur Identität congruent zu nehmen. Das andre Repräsentanten-System ist:

$$\frac{a_i \omega_1}{n}, \quad \frac{32 c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n}, \quad a_i d_i = n, \quad c_i < a_i .$$

Die lineare Substitution A_i, B_i, C_i, D_i anlangend, welche vom zweiten Repräsentantensystem zum ersten überführt, beachte man dass

$$D_i = d_i^{-1} \equiv d_i \bmod 8.$$

Es ist daher entweder $(A_i, 0, 0, D_i)$ oder $(-A_i, 0, 0, -D_i)$ mod 4 zur Identität congruent und folglich:

$$(10) \quad x\lambda_\mu^{(i)} = \frac{\{\overline{\omega}_1{}^{(i)}, \overline{\omega}_2{}^{(i)}\}}{\sigma\lambda\mu} = E\lambda_\mu^{(i)} . \frac{\sigma\lambda\mu \left\{ \frac{a_i \omega_1}{n}, \frac{32 c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n} \right\}}{\sigma\lambda\mu}.$$

Damit sind die $x\lambda_\mu^{(i)}$ eindeutig definirt und die Reihen-Entwicklungen nach q vermittelt.

Wir studiren nunmehr ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2 und zwar wieder so, dass wir zunächst das Verhalten bei Ausübung von S und T bestimmen.

Es entpricht einerseits:

$P = S = U = (1,0,1,1 \equiv$	$(1, 0, 1.1, 1) \pmod{32}$	$V \equiv$	$(1,0,1,1)$
	$(1, 0, 9.25, 1)$		$(1,0,25,1)$
	$(1, 0, 17.17, 1)$		$(1,0,17,1)$
	$(1, 0, 25.9, 1)$		$(1,0,9,1)$

$P=S=U=(1,0,1,1)\equiv$	(1, 0, 5.13, 1)	(mod 32)	$V\equiv$ (1,0,13,1)
	(1, 0, 13.5, 1)		(1,0,5,1)
	(1, 0, 21.29, 1)		(1,0,29,1)
	(1, 0, 29.21, 1)		(1,0,21,1)
	(1, 0, 3.11, 1)		(1,0,11,1)
	(1, 0, 7.23, 1)		(1,0,23,1)
	(1, 0, 11 3, 1)		(1,0.3,1)
	(1, 0, 15.15, 1)		(1,0,15,1)
	(1, 0, 19.27, 1)		(1,0,27,1)
	(1, 0, 23.7, 1)		(1,0,7,1)
	(1, 0, 27.19, 1)		(1,0,19,1)
	(1, 0, 31.31, 1)		(1,0,31,1)

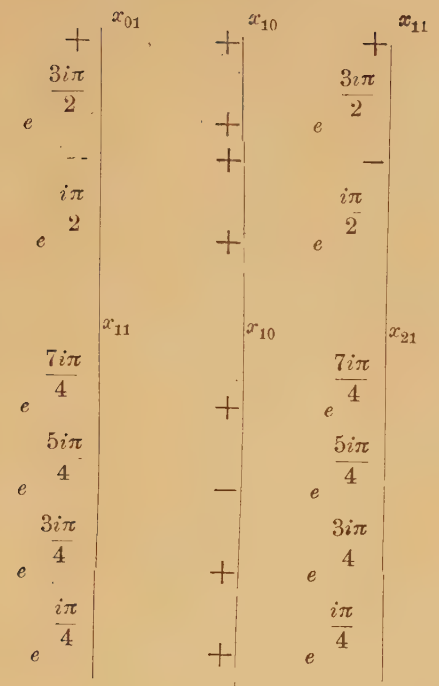
wenn successiv die Fälle $n \equiv 1, 9, 17, 25$; 5, 13, 21, 29; 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31 mod 32 unterschieden werden, wie dies im folgenden immer geschieht.

Andrerseits entspricht in analoger Weise:

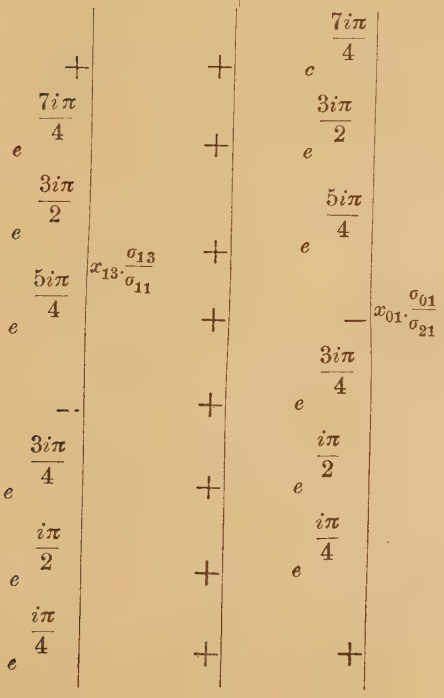
$P=T=U=$	(0,−1,1.1,0)	(mod 32)	$V\equiv$ (0,−1,1,0)
$(0,-1,+1,0)\equiv$	(0,−1,9.25,0)		(0,−9,25,0)
	(0,−1,17.17,0)		(0,−17,17,0)
	(0,−1,25,9,0)		(0,−25,9,0)
	(0,−1,5.13,0)		(0,−5,13,0)
	(0,−1,13.5,0)		(0,−13,5,0)
	(0,−1,21.29,0)		(0,−21,29,0)
	(0,−1,29.21,0)		(0,−29,21,0)
	(0,−1,3.11,0)		(0,−3,11,0)
	(0,−1,7.23,0)		(0,−7,23,0)
	(0,−1,11.3,0)		(0,−11,3,0)
	(0,−1,15.15,0)		(0,−15,15,0)
	(0,−1,19.27,0)		(0,−19,27,0)
	(0,−1,23.7,0)		(0,−23,7,0)
	(0,−1,27.19,0)		(0,−27,19,0)
	(0,−1,31.31,0)		(0,−31,31,0)

Man findet damit folgende Resultate:

8)


x_{01}
x_{10}
x_{11}
x_{11}
x_{10}
x_{21}

(11)

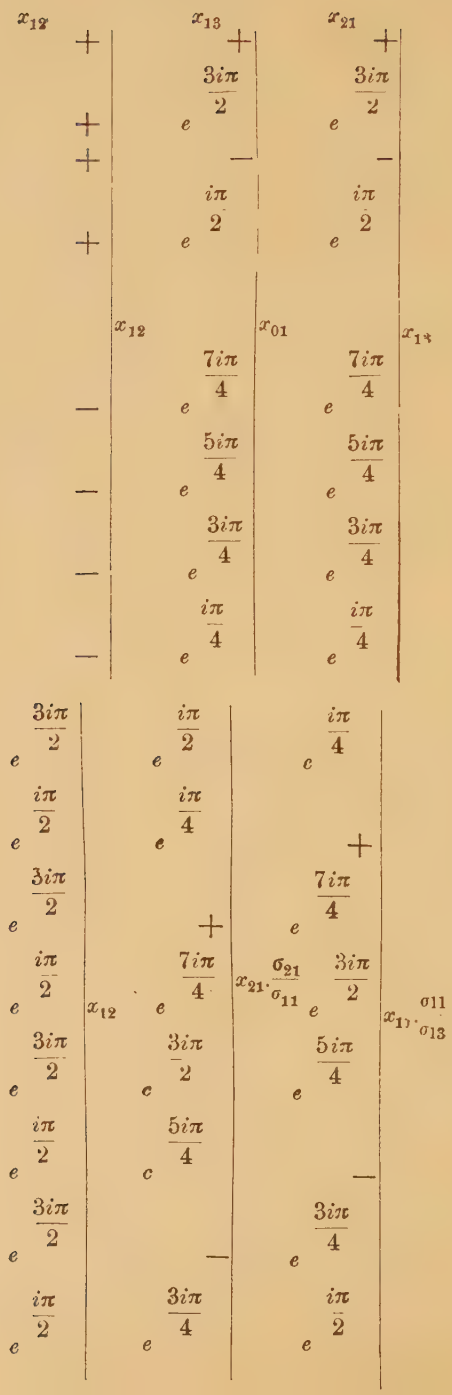

$x_{13} \cdot \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{11}}$
$x_{01} \cdot \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{21}}$

x_{12}	x_{13}	x_{21}
$+$	$+$	$+$
$+$	$e^{\frac{3i\pi}{2}}$	$e^{\frac{3i\pi}{2}}$
$+$	$-$	$-$
$+$	$e^{\frac{i\pi}{2}}$	$e^{\frac{i\pi}{2}}$

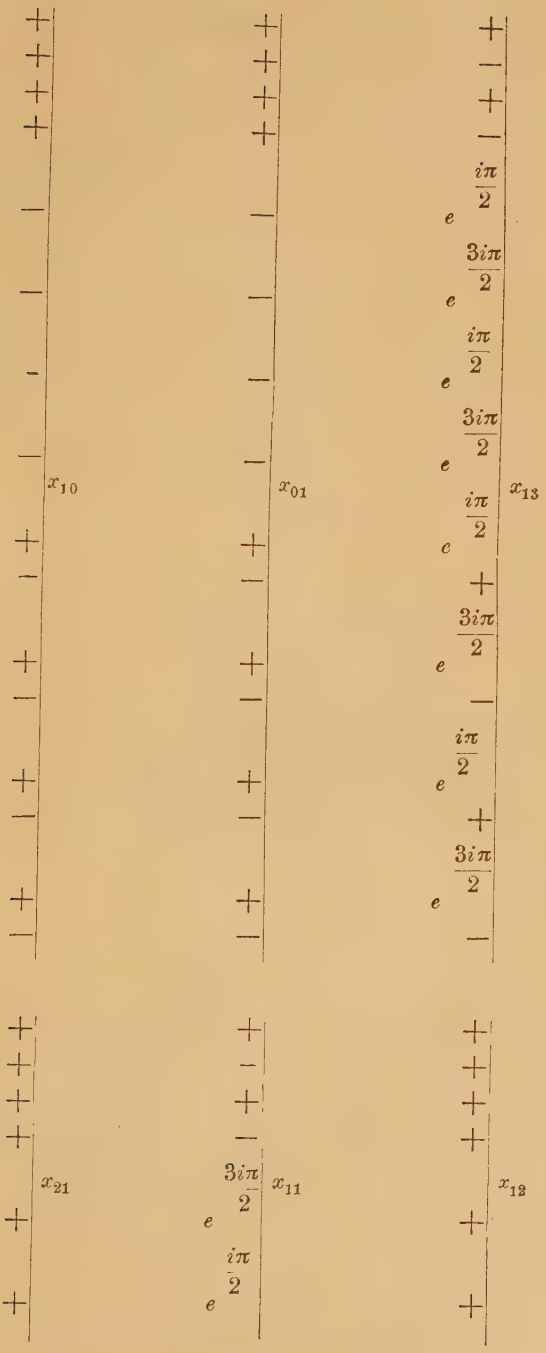
x_{12}	x_{01}	x_{13}
$-$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}$
$-$	$e^{\frac{5i\pi}{4}}$	$e^{\frac{5i\pi}{4}}$
$-$	$e^{\frac{3i\pi}{4}}$	$e^{\frac{3i\pi}{4}}$
$-$	$e^{\frac{i\pi}{4}}$	$e^{\frac{i\pi}{4}}$

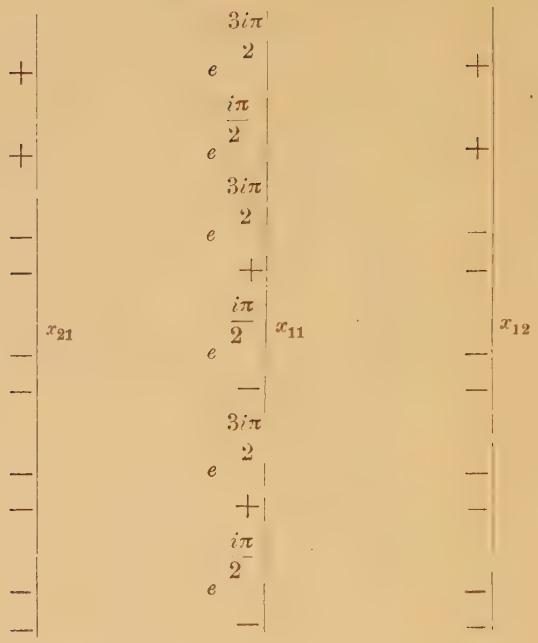
$e^{\frac{3i\pi}{2}}$	$e^{\frac{i\pi}{2}}$	$e^{\frac{i\pi}{4}}$	
$e^{\frac{i\pi}{2}}$	$e^{\frac{i\pi}{4}}$	$+$	
$e^{\frac{3i\pi}{2}}$	$+$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}$	
$e^{\frac{i\pi}{2}}$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}$	$e^{\frac{3i\pi}{2}}$	
$e^{\frac{3i\pi}{2}}$	$e^{\frac{3i\pi}{2}}$	$e^{\frac{5i\pi}{4}}$	
$e^{\frac{i\pi}{2}}$	$e^{\frac{5i\pi}{4}}$	$-$	
$e^{\frac{3i\pi}{2}}$	$-$	$e^{\frac{3i\pi}{4}}$	
$e^{\frac{i\pi}{2}}$	$e^{\frac{3i\pi}{4}}$	$e^{\frac{i\pi}{2}}$	

x_{12} $x_{21}\cdot\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}}$ $x_{11}\cdot\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}}$



T)





Um weiterhin Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir unsere Entwicklungen wieder auf irgend eine der sechs simultanen Gleichungen beschränken. Durch Ausführung linearer Substitutionen der Perioden können wir dann die für eine Gleichung gewonnenen Resultate auf die fünf andern übertragen. Der Tabelle (11) gemäss wird es am einfachsten sein, die Gleichung für x_{10} zu Grunde zu legen.

Für diese Gleichung können wir zunächst unmittelbar die vier Transformationen in sich angeben; (11) zeigt nämlich: Die Gleichung für x_{10} bleibt (unter Ausschluss der identischen Operation) ungeändert, wenn man in derselben die linearen Substitutionen S, S^2, S^3 der Perioden ω_1, ω_2 vornimmt.

Betreffs der Beschaffenheit der Multiplicator-Gleichungen für die $x_{\lambda,\mu^{(i)}}$ ergiebt die Specialisirung der allgemeinen Resultate auf den vorliegenden Fall im allgemeinen dies: Je N Grössen $x_{\lambda,\mu^{(i)}}$, $i = 1, 2, \ldots N$, genügen einer Gleichung Nten Grades, deren Coefficienten der vierten Stufe in Bezug auf vierte Einheitswurzeln adjungirt sind.

Daneben treten folgende Specificationen:

a) Ist $n \equiv 1 \bmod 8$, so sind sämtliche Coefficienten von der 4ten Stufe.

b) Ist $n \equiv 1$ nur mod 4, so sind die Coefficienten abwechselnd von der 4ten Stufe und der 4ten Stufe in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt, und zwar ist das eine oder andre der Fall, je nachdem die betreffende homogene symmetrische Function der Wurzeln von geradem oder ungeradem Grade ist.

c) Ist $n \equiv 1$ nur mod 2, so sind die Coefficienten 1) von der 4ten Stufe, 2) der vierten Stufe in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt, 3) der 4ten Stufe in Bezug auf 4te Einheitswurzeln adjungirt, je nachdem der Grad der betreffenden homogenen symmetrischen Function der Wurzeln 1) durch 4, 2) durch 2 teilbar, 3) ungerade ist.

§. 3. *Werte der Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ in den Ecken des Fundamental-Polygons.*

Man findet für die Ecken des Fundamental-Polygons folgende Werte der Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ (bez. in 1ter Annäherung):

$$
\begin{array}{ll}
\omega = i\infty) & E_{10}^{(i)} \cdot \sqrt[1]{d_i} \\
\omega = 0) & \\
\omega = 1) & \\
\omega = 2) & A_i q^{-\frac{3}{16}\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)} \\
\omega = 3) & \\
\omega = \tfrac{1}{2}) & B_i q^{-\frac{1}{4}\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)}
\end{array}
\qquad (12)
$$

unter A_i, B_i gewisse, leicht zu bestimmende Constanten verstanden, welche nur abkürzend eingeführt sind, um die vielfachen Fallunterscheidungen zu umgehen. Ueberdies benötigen wir die expliciten Werte von A_i, B_i im folgenden nicht. Wir entnehmen diesen Angaben (12) folgendes:

1) In der Ecke $\omega = i\infty$ des Fundamental-Polygons sind sämtliche N Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ endlich und von null verschieden.

2) In den fünf andern Ecken des Fundamental-Polygons sind diese N Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ stets zu einem Teil null und zu einem Teil unendlich (ausserdem, wenn n eine Quadrat-Zahl ist, noch zu einem Teil endlich und von null verschieden).

3) In der Ecke $\omega = +\frac{1}{2}$ werden die Wurzeln, an $q = 0$ gemessen, in anderer Ordnung null und unendlich, als in den vier Ecken $\omega = 0, 1, 2, 3$, in denen die Werte der Wurzeln je übereinstimmen.

Die in (12) gefundenen Null- und Unendlichkeitspunkte der Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ sind die einzigen im Fundamental-Polygon 4ter Stufe.

§ 4. *Form der Coefficienten. Aufstellung der Gleichungen.*

Betreffs der Form der Coefficienten unserer Multiplicator-Gleichungen für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ haben wir die allgemeine Betrachtung von pag. 16. etc. auf Congruenz-Moduln 16ter Stufe $\psi(\omega)$ in Anwendung zu bringen, welche in Bezug auf vierte Einheitswurzeln der vierten Stufe adjungirt sind.

Wir setzen an:

$$[\psi(\omega)]^4 = R(o)$$

und leiten daraus ab, da $\psi(\omega)$ als eindeutige Function von ω nur in $o = 0, i^k, \infty$ verzweigt sein kann:

$$\psi(\omega) = (\sqrt[4]{o})^{\alpha}.(\sqrt[4]{o-1})^{\beta}.(\sqrt[4]{o-i})^{\gamma}.(\sqrt[4]{o+1})^{\delta}.(\sqrt[4]{o+i})^{\varepsilon}.R(o)$$

unter α, β, γ, δ, ε ganze Zahlen verstanden. Nun sind aber $\sqrt[4]{o}$, $\sqrt[4]{o-i^k}$ keine Congruenz-Moduln 16ter Stufe, sondern erst gewisse Producte und Quotienten dieser fünf Grössen sind Congruenz-Moduln 16ter Stufe, welche der vierten Stufe in Bezug auf vierte Einheitswurzeln adjungirt sind. Diese Producte und Quotienten aus $\sqrt[4]{o}$, $\sqrt[4]{o-i^k}$ müssen sich rational durch die $\sigma_{\lambda\mu}$ ausdrücken, weil dieselben ein volles Formensystem für die 16te Stufe überhaupt sind. Um daher die sämtlichen Verbindungen von $\sqrt[4]{o}$ und $\sqrt[4]{o-i^k}$ zu Producten und Quotienten, welche Congruenz-Moduln 16ter Stufe sind, ausfindig zu machen, können wir fragen, welche Producte und Quotienten von o und $(o-i^k)$ sich als 4te Potenzen rationaler Functionen der $\sigma_{\lambda\mu}$ ausdrücken. Oder wir können umgekehrt und unter Bezug auf (8), welches die sämtlichen Producte und Quotienten von o und $(o-i^k)$ als Producte und Quotienten der Grössen $\sigma_{\lambda\mu}^8$ darstellt, fragen:

Welche Producte und Quotienten der sechs Grösseu $\sigma\lambda_\mu{}^8$ sind 2te Potenzen von Producten und Quotienten der fünf Grössen o und $(o-i^k)$? Diese Frage lässt sich nun auf Grund der Formel-Gruppe (8) leicht beantworten.

Von Producten und Quotienten der sechs Grössen $\sigma\lambda_\mu{}^8$, welche 2te Potenzen von Producten und Quotienten der fünf Grössen o, $(o-i^k)$ sind, existiren nämlich nach (8) nur die durch folgende Relationen gegebenen:

(13)
$$(o_{01}\sigma_{21})^8 : (\sigma_{10}\sigma_{12})^8 : (\sigma_{11}\sigma_{13})^8$$
$$= -[(1+o)(1-o)]^2 : -4o^2 : +[(1+io)(1-io)]^2 .$$

Daher sind von den Producten und Quotienten von $\sqrt[4]{o}$ und $\sqrt[4]{o-i^k}$ nur die beiden Ausdrücke

$$\sqrt[4]{\frac{o}{(1+o)(1-o)}} \quad \text{und} \quad \sqrt[4]{\frac{o}{(1+io)(1-io)}}$$

(abgesehen von deren Product, Quotienten und ganzzahligen Potenzen) der 4ten Stufe in Bezug auf 4te Einheitswurzeln adjungirt. Die geradzahligen Potenzen dieser 2 Grössen sind der 4ten Stufe nur in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt.

In dem der vierten Stufe in Bezug auf 4te Einheitswurzeln adjungirten Factor:

$$(\sqrt[4]{o})^\alpha . (\sqrt[4]{o-1})^\beta . (\sqrt[4]{o-i})^\gamma . (\sqrt[4]{o+1})^\delta . (\sqrt[4]{o+i})^\varepsilon$$

in der Darstellung von $\psi(\omega)$ sind nun aber weiter ausser den durch das Vorhergehende indicirten Factoren:

$$\left(\sqrt[4]{\frac{o}{(1+o)(1-o)}}\right)^a \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{o}{(1+io)(1-io)}}\right)^b$$

auch solche Producte und Quotienten von $\sqrt{o}$ und $\sqrt{o-i^k}$ zulässig, welche der 4ten Stufe nur in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt sind. Wir haben daher noch zu bestimmen, welche andren Producte und Quotienten von $\sqrt{o}$ und $\sqrt{o-i^k}$ ausser

$$\sqrt{\frac{o}{(1+o)(1-o)}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{o}{(1+io)(1-io)}}$$

der 2ten Stufe in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt sind. Dazu werden wir, dem Ideengange von pag. 72., folgend fragen, welche Producte und Quotienten der sechs Grössen $\sigma\lambda_\mu$ vierte Po-

tenzen von Producten und Quotienten der fünf Grössen o und $(o-i^k)$ sind. Die Beantwortung dieser Frage erledigt sich ebenfalls leicht auf Grund von (8) und ist bereits durch (9) gegeben. Danach giebt es (ausser den beiden bereits genannten) nur folgende drei Moduln 8ter Stufe, welche der vierten Stufe in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt sind:

$$\sqrt{o},\quad \sqrt{\frac{1-o}{1+o}},\quad \sqrt{\frac{1-io}{1+io}}.$$

(von deren Product, Quotienten und ganzzahligen Potenzen abgesehen). Wir gewinnen daher als allgemeinste Darstellung eines Congruenz-Moduls der 16ten Stufe, der der vierten Stufe in Bezug auf 4te Einheitswurzeln adjungirt ist:

$$\psi(\omega) = \left(\sqrt[4]{\frac{o}{1-o^2}}\right)^a \left(\sqrt[4]{\frac{o}{1-o^2}}\right)^b \cdot (\sqrt{o})^c \cdot \left(\sqrt{\frac{1-o}{1+o}}\right)^d \left(\sqrt{\frac{1-io}{1+io}}\right)^e \cdot R(o),$$

worin wir a und b auf die Werte 0, 1, 2, 3 und c, d, e auf die Werte 0, 1 beschränken können, oder in einer für das Folgende zweckmässigeren Form:

$$(14)\quad \psi(\omega) = \left(\sqrt[4]{\frac{o}{1-o^2}}\right)^p \left(\sqrt[4]{\frac{o}{1+o^2}}\right)^q \left(\sqrt{\frac{o}{1-o^2}}\right)^u \left(\sqrt{\frac{o}{1+o^2}}\right)^v \cdot (\sqrt{o})^x \cdot \left(\sqrt{\frac{1-o}{1+o}}\right)^y \left(\sqrt{\frac{1-io}{1+io}}\right)^z \cdot R(o),$$

worin wir p, q, u, v, x, y, z auf die Werte 0 und 1 beschränken können und wollen.

Um diese Darstellung (14) vollkommen eindeutig zu machen, haben wir festzusetzen, wie die dabei auftretenden vierten und zweiten Wurzeln gezogen werden sollen. Wir greifen dazu zweckmässig auf (13) und (9) zurück und definiren:

$$(15)\quad \sqrt[4]{\frac{o}{1-o^2}} = e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sigma_{10}\sigma_{12}}{\sigma_{01}\sigma_{21}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{o}{1+o^2}} = e^{\frac{3i\pi}{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sigma_{10}\sigma_{12}}{\sigma_{11}\sigma_{13}}$$

(15)
$$\sqrt{o} = e^{\frac{3i\pi}{8}} \cdot \frac{\sigma_{10}}{\sigma_{12}}$$

$$\sqrt{\frac{1-o}{1+o}} = e^{\frac{13i\pi}{8}} \cdot \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{21}}$$

$$\sqrt{\frac{1-io}{1+io}} = e^{\frac{i\pi}{8}} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}}$$

worin wir unter $\sqrt[4]{2}$ beide mal dieselbe 4te Wurzel und zwar die reelle positive verstehen. Im Anschluss an diese eindeutige Darstellung unserer zur 4ten Stufe adjungirten Moduln durch die $\sigma_{\lambda\mu}$ können wir das Verhalten derselben bei Ausübung von S und T angeben, und zwar ist dies folgendes:

$$\sqrt[4]{\frac{o}{1-o^2}} \quad e^{\frac{11i\pi}{8}} \quad \sqrt[4]{\frac{o}{1+o^2}} \quad e^{\frac{3i\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-o^2}{o}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{o}{1+o^2}} \quad e^{\frac{7i\pi}{8}} \quad \sqrt[4]{\frac{o}{1-o^2}} \quad e^{\frac{7i\pi}{4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1-o^2}{1+o^2}}$$

(16)
$$\sqrt{o} \quad e^{\frac{i\pi}{4}} \quad \sqrt{o} \quad -\sqrt{\frac{1-o}{1+o}}$$

$$\sqrt{\frac{1-o}{1+o}} \quad -\sqrt{\frac{1-io}{1+io}} \quad -\sqrt{o}$$

$$\sqrt{\frac{1-io}{1+io}} \quad -\sqrt{\frac{1+o}{1-o}} \quad e^{\frac{7i\pi}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1-io}{1+io}}$$

Weiteren Aufschluss über die Form der Coefficienten unserer Gleichungen als durch (14) erhalten wir, wenn wir die Transformationen

der Gleichungen in sich heranziehen. Und zwar werden wir, um zunächst die Exponenten p und q der zur 4ten Stufe in Bezug auf 4te Einheitswurzeln adjungirten Moduln in (14) zu bestimmen, lineare Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 in Anwendung bringen, welche mod 8. zur Identität congruent sind. Nachdem p und q auf diese Weise bestimmt sind, werden wir durch Ausübung linearer Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2, welche mod 4 zur Identität congruent sind, in analoger Weise die Exponenten u, v, x, y, z bestimmen. Diese Discussion verläuft ganz ähnlich wie die entsprechende Discussion im Falle $s = 3$, pag. 48. Man findet schliesslich für einen Coefficienten $\psi_{10^{(v)}}(\omega)$, welcher einer homogenen symmetrischen Function $v$ten Grades der Wurzeln $x_{10^{(v)}}$ entspricht, sofern man $\nu = \nu' + 4\nu''$ setzt und ν' auf die Werte 0, 1, 2, 3 beschränkt:

a) wenn $n \equiv 3 \bmod 8$ $\psi_{10^{(v)}}(\omega) = \left(\sqrt[4]{\frac{o^2}{1-o^4}} \cdot \sqrt{o}\right)^{4-v} . R(o)$,

b) wenn $n \equiv 7 \bmod 8$ $\psi_{10^{(v)}}(\omega) = \left(\sqrt[4]{\frac{o^2}{1-o^4}} \cdot \sqrt{o}\right)^{v'} . R(o)$.

Um nunmehr Aufschluss über die Form von $R(o)$ zu erhalten, benutzen wir die Transformationen der Gleichungen in sich, welche durch lineare Substitutionen der Perioden ω_2, ω_2 zu Wege kommen, die nicht mod 4 zur Identität congruent sind. Diese 3 linearen Substitutionen S, S^2, S^3 bringen folgende Aenderungen hervor:

(17)

	x_{10}	$\sqrt[3]{\frac{o^4}{1-o^4}}$	o
$S)$	x_{10}	$+i\sqrt[4]{\frac{o^4}{1-o^4}}$	$+io$
$S^2)$	x_{10}	$-\sqrt[4]{\frac{o^4}{1-o^4}}$	$-o$
$S^3)$	x_{10}	$-i\sqrt[4]{\frac{o^4}{1-o^4}}$	$-io$

Aus den früheren Angaben über die Oktaeder-Substitutionen geht hervor, dass $i^k . o$ die einzigen Oktaeder-Substitutionen sind, welche sich bei Ausübung von S um i ändern. Daher folgt aus (17):

(18) $\psi_{10^{(v)}}(\omega) = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{1-o^4}}\right)^{\binom{4-\nu'}{\nu'}} . R(o)$,

in welcher Formel sich die zweifache Fall-Unterscheidung im Anschluss an das Vorhergehende darauf bezieht, ob $n \equiv 3$ oder $n \equiv 7 \bmod 8$ ist.

An letzter Stelle achten wir auf die Null- und Unendlichkeitspunkte der Wurzeln, welche in (12) angegeben worden sind. Die Lage derselben lässt sich mit Bezugnahme auf die Oktaeder-Substitutionen so beschreiben: Die Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ werden null und unendlich nur für unendlich grosses $\frac{1-o}{1+o}, \frac{1-io}{1+io}, \frac{1+o}{1-o}, \frac{1+io}{1-io}, o$. Daraus folgt, dass, wenn man die Gleichung für x_{10} so anschreibt, dass die höchste Potenz der Coefficienten 1 hat, einesteils

$$R(o^4) = G\left(\frac{1-io}{1+io}, \frac{1-o}{1+o}, \frac{1+io}{1-io}, \frac{1+o}{1-o}, o\right)$$

sein muss, unter G eine ganze Function der fünf Argumente verstanden, und dass andererseits das constante Glied der Gleichung unabhängig von o, also eine Constante ist, welche daher unmittelbar nach (12) angegeben werden kann. Soll nun diese ganze Function der fünf Argumente bei Vertauschung von o mit io ungeändert bleiben, so erfordert dies, dass sie eine ganze Function der beiden Argumente $\frac{1}{1-o^4}$ und $(1-o^4)$ ist. Die definitive Form der Coefficienten $\psi_{10}^{(\nu)}(\omega)$ ist daher, wenn wir abkürzend

$$X_{10} = \sqrt[4]{\frac{1}{1-o^4}} \quad \text{setzen,} \tag{19}$$

$$\psi_{10}^{(\nu)}(\omega) = X_{10}^{\binom{4-\nu'}{\nu'}} \cdot G\left(X_{10}^4, \frac{1}{X_{10}^4}\right) \tag{20}$$

Damit ist die allgemeine Discussion der Coefficienten der Gleichung für die $x_{10}^{(i)}$ zu ihrem Abschluss gebracht.

Durch Ausübung linearer Substitutionen von ω_1, ω_2 in der Gleichung für x_{10} erhält man successive die fünf andern simultanen Multiplicator-Gleichungen. Es mag genügen, die dabei auftretenden Argumente $X_{\lambda\mu}$ in den $\sigma_{\lambda\mu}$ dargestellt anzugeben und ihr Verhalten bei Ausübung von S und T zusammenzustellen. Diese Darstellung der $X_{\lambda\mu}$ durch die $\sigma_{\lambda\mu}$ vermittelt nämlich in bequemer Weise die Reihenentwickelungen der $X_{\lambda\mu}$.

(21)

$$
\begin{array}{llll}
 & & S & T \\
X_{01} = \dfrac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sigma_{01}\sigma_{21}^{2}}{\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13}} & & X_{11} & X_{10} \\
X_{10} = \dfrac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \dfrac{\sigma_{10}\sigma_{12}^{3}}{\sigma_{01}\sigma_{11}\sigma_{13}\sigma_{21}} & & X_{10} & X_{01} \\
X_{11} = \dfrac{e^{\frac{5i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \dfrac{\sigma_{11}\sigma_{13}^{3}}{\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{12}\sigma_{21}} & & e^{\frac{3i\pi}{4}} X_{21} & X_{13} \\
X_{12} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sigma_{12}\sigma_{10}}{\sigma_{01}\sigma_{11}\sigma_{13}\sigma_{20}} & & e^{\frac{i\pi}{2}} X_{12} & X_{21} \\
X_{13} = \dfrac{e^{\frac{7i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sigma_{13}\sigma_{11}^{2}}{\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{12}\sigma_{21}} & & X_{01} & X_{11} \\
X_{21} = \dfrac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sigma_{21}\sigma_{01}}{\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13}} & & e^{\frac{3i\pi}{4}} X_{13} & X_{12}.
\end{array}
$$

Für die Bestimmung des Grades der ganzen Function G in den beiden Argumenten $X_{\lambda\mu}{}^{4}$ und $\dfrac{1}{X_{\lambda\mu}{}^{4}}$, sowie für die Bestimmung der unbestimmten Constanten in der einzelnen Ansatz-Gleichung gelten dieselben Bemerkungen wie in den Fällen $s = 2, 3$.

§ 5. *Beispiele*: $n = 3, 5, 7$.

$n = 3$.

Man gewinnt mit Hilfe der particulären Gleichung für die Ecke $\omega = i\infty$ oder für $X_{10} = 1$:

$$\left(x_{10} - \frac{1}{3}\right)(x_{10} - 1)^{3} = x_{10}{}^{4} - \frac{10}{3} x_{10}{}^{3} + 4x_{10}{}^{2} - 2x_{10} + \frac{1}{3} = 0$$

folgenden Ansatz mit einer unbestimmten Constanten:

$$x_{10}{}^{4} + X_{10}{}^{3}\left\{\left(-\frac{10}{3} + A\right) - A\,\frac{1}{X_{10}{}^{4}}\right\} x_{10}{}^{3} + 4X_{10}{}^{2} x_{10}{}^{2} - 2X_{10}\, x_{10} + \tfrac{1}{3} = 0$$

Nach Bestimmung von A werden die sechs simultanen Gleichungen:

$$x_{01}^4 - \tfrac{2}{3} X_{01}^3 \left(4 + \frac{1}{X_{01}^4}\right) x_{01}^3 + 4 X_{01}^4 x_{01}^2 - 2 X_{01} x_{01} + \tfrac{1}{3} = 0,$$

$$x_{10}^4 - \tfrac{2}{3} X_{10}^3 \left(4 + \frac{1}{X_{10}^4}\right) x_{10}^3 + 4 X_{10}^2 x_{10}^2 - 2 X_{10} x_{10} + \tfrac{1}{3} = 0,$$

$$x_{11}^4 - \tfrac{2}{3} X_{13}^3 \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{11}} \left(4 + \frac{1}{X_{13}^4}\right) x_{11}^3 + 4 X_{13}^2 \left(\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{11}}\right)^2 x_{11}^2 - 2 X_{13} \left(\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{11}}\right)^3 x_{11} + \tfrac{1}{3} \left(\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{11}}\right)^4 = 0,$$

$$x_{12}^4 + \tfrac{2}{3} X_{12}^3 \left(4 - \frac{1}{X_{12}^4}\right) x_{12}^3 - 4 X_{12}^2 x_{12}^2 + 2 X_{12} x_{12} - \tfrac{1}{3} = 0,$$

$$x_{13}^4 - \tfrac{2}{3} X_{11}^3 \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}} \left(4 + \frac{1}{X_{11}^4}\right) x_{13}^3 + 4 X_{11}^2 \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}}\right)^2 x_{13}^2 - 2 X_{11} \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}}\right)^3 x_{13} + \tfrac{1}{3} \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}}\right)^4 = 0,$$

$$x_{21}^4 - \tfrac{2}{3} X_{21}^3 \left(4 - \frac{1}{X_{21}^4}\right) x_{21}^3 - 4 X_{21}^2 x_{21}^2 - 2 X_{21} x_{21} - \tfrac{1}{3} = 0,$$

$$n = 5.$$

Der Ansatz hat drei unbestimmte Constanten. Nach deren Bestimmung sind die sechs simultanen Gleichungen:

$$x_{21}^6 + \tfrac{4}{5} X_{01}^2 \left(-11 + 16 X_{01}^4 + \frac{1}{X_{01}^4}\right) x_{01}^5 + (-7 + 16 X_{01}^4) x_{01}^4 + 8 X_{01}^2 x_{01}^3 + 3 x_{01}^2 - \tfrac{1}{5} = 0,$$

$$x_{10}^6 - \tfrac{4}{5} X_{10}^2 \left(-11 + 16 X_{10}^4 + \frac{1}{X_{10}^4}\right) x_{10}^5 + (-7 + 16 X_{10}^4) x_{10}^4 - 8 X_{10}^2 x_{10}^3 + 3 x_{10}^2 - \tfrac{1}{5} = 0,$$

$$x_{11}^6 + e^{\frac{i\pi}{4}} \tfrac{4}{5} X_{11}^2 \left(-11 + 16 X_{11}^4 + \frac{1}{X_{11}^4}\right) x_{11}^5 + e^{\frac{i\pi}{2}} (-7 + 16 X_{11}^4) x_{11}^4 + e^{\frac{3i\pi}{4}} \cdot 8 X_{11}^2 x_{11}^3 - 3 x_{11}^2 + e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot \tfrac{1}{5} = 0,$$

$$x_{12}^6 - \tfrac{4}{5} X_{12}^2 \left(11 + 16 X_{12}^4 + \frac{1}{X_{12}^4}\right) x_{12}^5 + (7 + 16 X_{12}^4) x_{12}^4 - 8 X_{12}^2 x_{12}^3 + 3 x_{12}^2 + \tfrac{1}{5} = 0,$$

$$x_{13}^6+e^{\frac{7i\pi}{4}}\tfrac{4}{5}X_{13}^2\left(-11+16X_{13}^4+\frac{1}{X_{13}^4}\right)x_{13}^5+e^{\frac{3i\pi}{2}}(-7+16X_{13}^4)x_{13}^4$$
$$+e^{\frac{5i\pi}{4}}.8X_{13}^2x_{13}^3-3x_{13}^2+e^{\frac{3i\pi}{2}}.\tfrac{1}{5}=0,$$

$$x_{21}^6-\tfrac{4}{5}X_{21}^2\left(11+16X_{21}^4+\frac{1}{X_{21}^4}\right)x_{21}^5+(7+16X_{21}^4)x_{21}^4$$
$$-8X_{21}^2x_{21}^3+3x_{21}^2+\tfrac{1}{5}=0.$$

$$n=7.$$

Der Ansatz lautet:

$$x_{10}^8-X_{10}\left\{\left(\frac{48}{7}-A-B-C\right)+AX_{10}^4+BX_{10}^8+C\frac{1}{X_{10}^4}\right\}x_{10}^7$$
$$+X_{10}^2\left\{(20-D-E)+DX_{10}^4+E\frac{1}{X_{10}^4}\right\}x_{10}^6$$
$$-X_{10}^3\left\{(32-F)+F.\frac{1}{X_{10}^4}\right\}x_{10}^5-\{(30-G)+GX_{10}^4\}x_{10}^4$$
$$-16X_{10}x_{10}^3+4X_{10}^2x_{10}^2-\tfrac{1}{7}=0,$$

hat also 7 zunächst unbestimmte Constanten. Wir begnügen uns damit, in diesem complicirteren Beispiele nur eine der sechs simultanen Gleichungen, diejenige für x_{10}, explicite anzugeben. Dieselbe lautet:

$$x_{10}^8-X_{10}\left(\frac{72}{7}-\frac{544}{7}X_{10}^4+\frac{512}{7}X_{10}^8+\frac{8}{7}.\frac{1}{X_{10}^4}\right)x_{10}^7$$
$$+X_{10}^2\left(-56+64X_{10}^4+12.\frac{1}{X_{10}^4}\right)x_{10}^6$$
$$-X_{10}^3\left(-8+40.\frac{1}{X_{10}^4}\right)x_{10}^5+(46-16X_{10}^4)x_{10}^4-16X_{10}x_{10}^3$$
$$+4X_{10}^2x_{10}^2-\tfrac{1}{7}=0.$$

Schlussbemerkungen über den Zusammenhang der zu $s=5$ gehörigen $\sigma\lambda\mu$ mit der Ikosaeder-Irrationalität.

Wir wollen zum Schluss noch die fünften Teilwerte der σ-Function mit der Ikosaeder-Irrationalität in Verbindung bringen, um damit wenigstens die Grundlage zu liefern für die Discussion der Multiplicator-Gleichungen 5ter Stufe für die Teilwerte der σ-Function.

Die $\sigma_{\lambda\mu}$ zeigen für $s = 5$ folgendes Verhalten:

a) Bei beliebigen linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 permutiren sich die $\sigma_{\lambda\mu}$ bis auf vortretende 10te Einheitswurzeln und aus irgend einem der 12 verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ lassen sich daher durch lineare Substitution der Perioden sämtliche zwölf $\sigma_{\lambda\mu}$ und nur diese ableiten.

Dasselbe geht auch aus folgender Tabelle hervor, welche die 12 verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$, die für das Folgende zu Grunde gelegt sind, namhaft macht, und deren Verhalten bei Ausübung von S und T angibt:

(1)

	S	T
σ_{01}	σ_{11}	σ_{10}
σ_{02}	σ_{22}	σ_{20}
σ_{10}	σ_{10}	$-\sigma_{01}$
σ_{20}	σ_{20}	$-\sigma_{02}$
σ_{11}	σ_{21}	$+\varepsilon^3.\sigma_{14}$
σ_{12}	$-\varepsilon^2.\sigma_{23}$	$-\varepsilon^2.\sigma_{31}$
σ_{13}	$-\varepsilon^2.\sigma_{12}$	$-\varepsilon^2.\sigma_{21}$
σ_{14}	$-\varepsilon^2.\sigma_{01}$	$-\varepsilon^2.\sigma_{11}$
σ_{21}	σ_{31}	$+\varepsilon^3.\sigma_{13}$
σ_{22}	$+\varepsilon^4.\sigma_{13}$	$-\varepsilon.\sigma_{23}$
σ_{23}	$+\varepsilon^4\sigma_{02}$	$+\varepsilon^4.\sigma_{22}$
σ_{31}	$-\varepsilon.\sigma_{14}$	$+\varepsilon^3.\sigma_{12}$.

b) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 5 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 5te Einheitswurzel, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind der 5ten Stufe adjungirt.

c) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 25 zur Identität congruent sind, bleibt jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ ungeändert, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind von der 25ten Stufe.

d) Die Substitutions-Coefficienten von linearen Substitutionen der Perioden, welche auf die $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgeübt werden, dürfen beliebig mod 50 (nicht mod 25, wenn die Determinante dabei nicht gleich 1 bleibt) modificirt werden.

Als den Haupt-Modul für die 5te Stufe führen wir nach Herrn Klein[1]) die folgende Ikosaeder-Irrationalität ein:

---

1) Man vergleiche Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder.

$$(2)\quad z = q^{\frac{2}{5}} \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^k . q^{5k^2-3k}}{\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^k . q^{5k^2-k}} = q^{\frac{2}{5}}(1-q^2+\ldots)$$

Dieselbe entsteht, wie kurz angegeben werden mag, indem man in der Bezeichnung der bereits citirten Abhandlung des Herrn Klein in den Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. die beiden zu $n = 5$ gehörigen Modulformen

$$z_\alpha = (-1)^{\alpha+1} \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{q^{\frac{\alpha^2}{n}}}{\sqrt{\Delta^n}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{\alpha\omega_2\pi}{\omega_1}, q^n\right)$$

bildet (cf. daselbst pag. 371) und den Quotienten

$$(2a)\qquad z = -\frac{z_1}{z_2}$$

nimmt. Das Verhalten der z_α bei Ausübung von S und T ist (nach Formel (112) l. c.) folgendes:

$$S)\qquad z_\alpha(\omega_1, \omega_2+\omega_1) = \varepsilon^{-\frac{\alpha(5-\alpha)}{2}} . z^\alpha$$

$$T)\qquad -\sqrt{5} . z_\alpha(-\omega_2, \omega_1) = \sum_{-2}^{+2} \varepsilon^{\alpha\beta} . z_\beta .$$

Daher führen diese erzeugenden Substitutionen S und T die Ikosaeder-Irrationalität z über in

$$S)\qquad \varepsilon z$$

$$(2b)\qquad T)\ \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}$$

In dem Schema

$$(3a)\qquad \begin{matrix} S^l, & S^k T S^l, \\ S^l U, & S^k T S^l U \end{matrix}$$

sind, wenn man darin k und l unabhängig von einander die Werte 0, 1, 2, 3, 4 annehmen lässt und $U = S^3 T S^2 T S^3 T$ setzt, 60 mod 5 incongruente lineare Substitutionen von ω zusammengefasst. In (3a) haben wir daher zugleich die ihnen entsprechenden 60 Ikoaeder-Substitutionen in symbolischer Schreibweise vor uns. Explicite sind dieselben, da U das z in $-\frac{1}{z}$ überführt:

(3b)
$$\varepsilon^i . z \quad \varepsilon^i . \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^k z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^k z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^i . z^i} \quad -\frac{1}{\varepsilon^i} ; \frac{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^4 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^4 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}.$$

Aus (3b) folgt mit Rücksicht darauf, dass z als Hauptmodul 5ter Stufe im Fundamental-Polygon dieser Stufe jeden Wert nur ein mal annimmt, dass dies Fundamental-Polygon 12 Ecken auf der reellen Axe hat. Die von uns getroffene Wahl dieser 12 Ecken ist aus folgender Tabelle ersichtlich, in welcher die Werte von z in diesen Punkten, wie sie sich aus diesen Definitionen (2) ergeben, notirt sind:

(4)
$$z(\omega=i\infty)=0. \qquad z(0)=\frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\varepsilon-\varepsilon^4}, \quad z(1)=\varepsilon.\frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\varepsilon-\varepsilon^4},$$
$$z(2)=\varepsilon^2.\frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\varepsilon-\varepsilon^4}, \quad z(3)=\varepsilon^3.\frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\varepsilon-\varepsilon^4}, \quad z(4)=\varepsilon^4.\frac{\varepsilon^2-\varepsilon^4}{\varepsilon-\varepsilon^4},$$
$$z(\tfrac{1}{2})=-\varepsilon^3.\frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, \quad z(1\tfrac{1}{2})=-\varepsilon^4.\frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, \quad z(2\tfrac{1}{2})=-\frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\varepsilon^2-\varepsilon^3},$$
$$z(3\tfrac{1}{2})=-\varepsilon.\frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, \quad z(4\tfrac{1}{2})=-\varepsilon^2.\frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, \quad z(^2/_5)=\infty.$$

Dies vorausgeschickt können wir nunmehr die $\sigma\lambda_\mu$ zu z in Beziehung setzen und zwar wird es uns in Analogie zu den Fällen $s=2, 3, 4$ vorzugsweise interessiren, welche rationalen Functionen von z sich auf Grund von b) für die Quotienten $\sigma\lambda_\mu{}^5 : \sigma\lambda'_\mu{}^5$ ergeben. Relationen zunächst, welche einfacher als diese in z aufgebaut sind, ergeben sich, wenn wir andere Combinationen der $\sigma\lambda_\mu$ als deren 5te Potenzen in Betracht ziehen. Ueben wir eine lineare Substitution aus

$$\omega_1' = (5a+1)\omega_1+5b\omega_2, \quad \omega_2' = 5c\omega_1+(5d+1)\omega_2,$$
$$(5a+1)(5d+1)-5b.5c=1,$$

welche mod 5 zur Identität congruent ist, und beachten, dass für eine solche

$$a+ab \equiv cd+d \equiv 0 \bmod 2$$

ist, so zeigt sich nämlich, dass dabei beispielsweise sowol

(5)
$$\sigma\lambda_0 . \sigma\lambda_1 . \sigma\lambda_2 . \sigma\lambda_3 . \sigma\lambda_4 \quad \text{als auch}$$
$$\sigma 0_\mu . \sigma 1_\mu . \sigma 2_\mu . \sigma 3_\mu . \sigma 4_\mu$$

ungeändert bleibt. λ und μ dürfen in (5) beliebige Werte annehmen. Indem wir speciell $\mu = 1$ und $\mu = 2$ setzen, haben wir den Ansatz:

$$\frac{\sigma_{01}\,\sigma_{11}\,\sigma_{21}\,\sigma_{31}\,\sigma_{41}}{\sigma_{02}\,\sigma_{12}\,\sigma_{22}\,\sigma_{32}\,\sigma_{42}} = \mathrm{Rat}(z)$$

Um die rationale Function rechter Hand auszuwerten, beachten wir, dass wir ihre sämtlichen Null- und Unendlichkeitspunkte dadurch angeben können, dass wir die Werte der $\sigma_{\lambda\mu}$ in den 12 Ecken des Fundamental-Polygons untersuchen, und dass sodann nur noch eine multiplicative Constante dadurch zu bestimmen ist, dass wir einen Term der beiderseitigen Reihenentwickelungen benutzen. Nun ist im Punkte $\omega = i\infty$ in erster Annäherung:

$$\sigma_{01} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot q^{-4/25} \qquad \sigma_{02} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot q^{-6/25}$$

$$\sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot(\varepsilon^2-\varepsilon^3) \qquad \sigma_{20} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot(\varepsilon-\varepsilon^4)$$

$$\sigma_{11} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{i\pi}{25}}\cdot\varepsilon^2 q^{-4/25} \qquad \sigma_{12} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{2i\pi}{25}}\cdot\varepsilon^2 q^{-6/25}$$

(6)

$$\sigma_{13} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot\varepsilon\, e^{\frac{3i\pi}{25}}\cdot\varepsilon^2 q^{-6/25} \qquad \sigma_{14} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{4i\pi}{25}}\cdot\varepsilon^2 q^{-4/25}$$

$$\sigma_{21} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{2i\pi}{25}}\cdot\varepsilon^4 q^{-4/25} \qquad \sigma_{22} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{4i\pi}{25}}\cdot\varepsilon^4 q^{-6/25}$$

$$\sigma_{23} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{6i\pi}{25}}\cdot\varepsilon^4 q^{-6/25} \qquad \sigma_{31} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{3i\pi}{25}}\cdot\varepsilon\, q^{-4/25}$$

und auf Grund dessen vermittelt die Tabelle (1) die Werte der $\sigma_{\lambda\mu}$ in den andern Ecken des Fundamental-Polygons. Man findet damit auf die angegebene Weise:

$$\frac{\sigma_{01}\,\sigma_{11}\,\sigma_{21}\,\sigma_{31}\,\sigma_{41}}{\sigma_{02}\,\sigma_{12}\,\sigma_{22}\,\sigma_{32}\,\sigma_{42}} = \varepsilon^4 . z.$$

Durch Ausübung linearer Substitutionen der Perioden erhalten wir

offenbar daraus Relationen, welche sämtliche Ikosaeder-Substitutionen durch derartige Combinationen der $\sigma_{\lambda,\mu}$ ausdrücken. Von den 60 Ikosaeder-Substitutionen sind nun immer je 5 mehr durch die vortretenden 5ten Einheitswurzeln von einander verschieden. Für die Darstellung durch jene Producte und Quotienten der $\sigma_{\lambda,\mu}$ kommen daher nur 12 Ikosaeder-Substitutionen als in dieser Beziehung von einander verschieden in Betracht. Je 2 von diesen 12 wieder hangen immer durch die einfache Operation $z' = -\frac{1}{z}$ zusammen. Es genügt daher, die Resultate nur für diejenigen 6 Ikosaeder-Substitutionen anzugeben, aus denen alle andern durch Ausübung von U und S^i hervorgehen, und zwar schreiben wir diese Ikosaeder-Substitutionen, um diese und spätere Formeln in der Schreibweise zu vereinfachen, mit Bezug auf (3a) symbolisch in S und T. Dann werden die 6 Formeln:

$$1 = +\varepsilon \cdot \frac{\sigma_{01}\sigma_{11}\sigma_{14}\sigma_{21}\sigma_{31}}{\sigma_{02}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{22}\sigma_{23}}, \qquad T = +\varepsilon^3 \cdot \frac{\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{14}}{\sigma_{20}\sigma_{21}\sigma_{22}\sigma_{23}\sigma_{31}}$$

$$(7) \qquad ST = +\frac{\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{12}\sigma_{21}\sigma_{23}}{\sigma_{02}\sigma_{13}\sigma_{14}\sigma_{20}\sigma_{31}}, \qquad S^2T = +\varepsilon \cdot \frac{\sigma_{02}\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{23}\sigma_{31}}{\sigma_{01}\sigma_{12}\sigma_{14}\sigma_{20}\sigma_{22}}$$

$$S^3T = -\varepsilon^3 \cdot \frac{\sigma_{02}\sigma_{10}\sigma_{14}\sigma_{21}\sigma_{23}}{\sigma_{01}\sigma_{11}\sigma_{13}\sigma_{20}\sigma_{23}}, \qquad S^4T = -\varepsilon^3 \cdot \frac{\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{13}\sigma_{22}\sigma_{31}}{\sigma_{02}\sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{20}\sigma_{21}}\Big)^1.$$

Mit diesen Relationen ist man im Stande, 6 der Quotienten $\sigma_{\lambda,\mu}{}^5 : \sigma_{\lambda',\mu'}{}^5$ durch z darzustellen, und zwar findet sich:

$$\frac{\sigma_{01}{}^5}{\sigma_{02}{}^5} = 1.ST.S^4T.S^2TU.S^3TU = \frac{z(z^4-3z^3++4z^2-2z+1)}{z^4+2z^3+4z^2+3z+1}$$

$$\frac{\sigma_{10}{}^5}{\sigma_{20}{}^5} = T.ST.S^2T.S^3.S^4T =$$

$$\frac{-[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)+2(\varepsilon-\varepsilon^4)]z^5+[2(\varepsilon^2-\varepsilon^3)-(\varepsilon-\varepsilon^4)]}{[2(\varepsilon^2-\varepsilon^3)-(\varepsilon-\varepsilon^4)]z^5-[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)+2(\varepsilon-\varepsilon^4)]}$$

$$\varepsilon^4 \cdot \frac{\sigma_{11}{}^5}{\sigma_{22}{}^5} = 1.T.S^2T.S^3TU.S^4TU$$

(7b)

$$\varepsilon^3 \cdot \frac{\sigma_{12}{}^5}{\sigma_{31}{}^5} = U.T.ST.S^2TU.S^4TU$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\sigma_{13}{}^5}{\sigma_{21}{}^5} = U.T.STU.S^3.S^4T$$

$$-\varepsilon \cdot \frac{\sigma_{13}{}^5}{\sigma_{31}{}^5} = 1.T.STU.S^2TU.S^3T$$

---

1) Diese Formelgruppe (7) findet sich im Princip bereits bei Bianchi, Math. Ann. Bd. 17., indem derselbe eine dieser 6 Formeln ableitet.

Die Ausübung linearer Substitutionen der Perioden in (7b) liefert keine neuen Relationen, sondern vertauscht nur dieselben unter sich. Diese 6 Quotienten $\sigma_{\lambda\mu}{}^5 : \sigma_{\lambda'\mu'}{}^5$ in (7^1) sind also rationale Functionen 5ten Grades von z.

Eine weitere Reihe von Relationen, welche zwischen den $\sigma_{\lambda\mu}$ und der Ikosaeder-Irrationalität bestehen, finden wir, wenn wir nochmals auf die Combinationen (5) zurückgehen und speciell λ und $\mu = 0$ setzen. Dann lehrt dies, dass auch $(\sigma_{01}\sigma_{02})^2$ und $(\sigma_{10}\sigma_{20})^2$ bei linearen Substitutionen der Perioden, welche mod 5 zur Identität congruent sind, ungeändert bleiben. Die Rechnung zeigt, dass dies sogar bereits mit $(\sigma_{01}\sigma_{02})$ und $(\sigma_{10}\sigma_{20})$ selbst der Fall ist. Dies giebt den Ansatz:

$$\frac{\sigma_{10}\sigma_{20}}{\sigma_{01}\sigma_{02}} = \mathrm{Rat}(z)$$

und zwar findet man auf analoge Weise wie vorhin:

$$\frac{\sigma_{10}\sigma_{20}}{\sigma_{01}\sigma_{02}} = 5z : [-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)][+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(z-\varepsilon^4)]$$

Bringt man darauf die Operationen S^i in Anwendung, so kann man schliesslich folgende fortlaufende Proportion anschreiben:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{10}\sigma_{20} : \sigma_{01}\sigma_{02} : \sigma_{11}\sigma_{22} : \sigma_{13}\sigma_{21} : \sigma_{12}\sigma_{31} : \sigma_{14}\sigma_{23} \\
&= 5\varepsilon : +[-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)][+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)] \\
&\quad : +\varepsilon^4[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)][+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon z+(\varepsilon-\varepsilon^4)] \\
&\quad : +\varepsilon^4[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^2 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)][+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^2 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)] \\
&\quad : -\varepsilon[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^3 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)][+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^3 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)] \\
&\quad : -\varepsilon^2[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^4 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)][+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^4 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)].
\end{aligned} \tag{8}$$

Weitere Relationen ergeben sich daraus durch Anwendung linearer Substitutionen der Perioden nicht. Diese Relationen (8) können sichtlich nicht dazu dienen, die noch fehlenden Quotienten $\sigma_{\lambda\mu} : \sigma_{\lambda'\mu'}$ mit Hilfe von (7^b) zu bestimmen. Dazu wird es vielmehr erforderlich, einen der noch fehlenden Quotienten direct als rationale Function von z auszuwerten. Man findet so beispielsweise durch die bekannte Methode:

$$\frac{\sigma_{10}{}^5}{\sigma_{01}{}^5} = (\sqrt{5})^5 \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^2 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^2 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^3 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^3 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \left[\frac{z}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}\right]^3 \tag{9}$$

unter $\sqrt{5}$ die positive Quadratwurzel verstanden. Dieser Quotient ist also eine rationale Function 7ten Grades in z.

Durch Ausübung linearer Substitutionen in (9) kann man nun unter ev. Benutzung der Formeln (7b) jeden beliebigen der noch fehlenden Quotienten $\sigma_{\lambda\mu}{}^5 : \sigma_{\lambda'\mu'}$ berechnen. Von den 66 überhaupt existirenden derartigen Quotienten sind nur die 6 in ($7^b_\blacksquare$) angegebenen vom 5ten Grade in z; die 60 andern sind vom 7ten Grade in z.

Will man die diesbez. Resultate in der Form der fortlaufenden Proportion:

$$\sigma_{10}{}^5 : \sigma_{20}{}^5 : \sigma_{21}{}^5 : \sigma^0{}_1{}^5 : \sigma_{12}{}^5 : R_1(z) : R_2(z) \ \ldots$$

zusammenfassen, so hat dies keine Schwierigkeit, aber die Formeln werden zu complicirt, als dass sie hier eine Stelle finden könnten. Es mag daher genügen. den Formeln (7^b), welche 6 von einander unabhängige Quotienten $\sigma_{\lambda\mu}{}^5 : \sigma_{\lambda'\mu'}{}^5$ gehen, folgende Formel-Serie an die Seite zu setzen, welche weitere 5 von jenen Quotienten unabhänflige Quotienten in der gewünschten Weise darstellt. Diese Formeln werden einfach erhalten, indem man (9) die Operationen S, vornimmt. Diese 11 von einander unabhängigen Quotienten (7^b) und (9^b) genügen dann, um irgend einen der andern Quotienten unmittelbar angeben zu können.

$$\frac{\sigma_{10}{}^5}{\sigma_{01}{}^5} = (\sqrt{5})^5 \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon_2 z+(\varepsilon-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^2 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^3 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^3 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}$$
$$\cdot\left[\frac{z}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}\right]^3$$

$$\frac{\sigma_{10}{}^5}{\sigma_{11}{}^5} = (\sqrt{5})^5 \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^3 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^3 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^4 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^4 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}$$
$$\cdot\left[\frac{\varepsilon z}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon z+\varepsilon^2-\varepsilon^3)}\right] \cdot \left[\frac{1}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}\right]^3$$

(9^b) $$\frac{\sigma_{10}{}^5}{\sigma_{21}{}^5} = (\sqrt{5})^5 \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^4 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^4 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}$$
$$\cdot\left[\frac{\varepsilon^2 z}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^2 z+\varepsilon^2-\varepsilon^3)}\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^2 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}\right]$$

$$\frac{\sigma 10^5}{\sigma_{31}{}^5} = (\mathcal{V}5)^5 \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon z+(\varepsilon^2-\varepsilon^4)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}$$

$$\cdot\left[\frac{\varepsilon^3 z}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^3 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^3 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}\right]^3$$

$$\frac{\sigma 10^5}{\sigma_{41}{}^5} = (\mathcal{V}5)^5 \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^2 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^2 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}$$

$$\cdot\left[\frac{\varepsilon^4 z}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^4 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}\right]\left[\frac{1}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^4 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}\right]^3$$

Inhalt.

Seite.

Einleitung 1

Erster Abschnitt. Allgemeines über die Multiplicator-Gleichungen für die Teilwerte der σ-Function.

§ 1. Die Teilwerte der σ-Function 3

§ 2. Transformation $n$ter Ordnung, Wahl der Repräsentanten, die Functionen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ 7

§ 3. Verhalten der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2 12

§ 4. Stufe einer Transformations-Gleichung. Existenz der Multiplicator-Gleichungen für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ 14

§ 5. Behandlung andrer Transformations-Gleichungen mit den $\sigma_{\lambda\mu}$ 18

§ 6. Form der Coefficienten und Aufstellung der Gleichungen . 20

Zweiter Abschnitt. Specielle Behandlung der Multiplicator-Gleichungen der niedersten Stufen für die Teilwerte der σ-Function.

Erstes Capitel. $s = 2$.

§ 1. Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ mit k^2 23

§ 2. Die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$. Ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Die Transformationen der Gleichungen in sich 25

§ 3. Werte der Wurzeln $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ in den Ecken des Fundamental-Polygons 28

§ 4. Form der Coefficienten. Aufstellung der Gleichungen . . . 30

§ 5. Beispiele. $n = 3, 5, 7, 9$ 34

Zweites Capitel. $s = 3$.

§ 1. Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ mit der Tetraeder-Irrationalität . . 40

§ 2. Die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$. Ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Die Transformationen der Gleichungen in sich 42

Seite

§ 3. Werte der Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ in den Ecken des Fundamental-Polygons 46

§ 4. Form der Coefficienten. Aufstellung der Gleichungen . . . 47

§ 5. Beispiele. $n = 2, 4, 5, 7$ 53

Drittes Capitel. $s = 4$.

§ 1. Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ mit k^2 und der Oktaeder-Irrationalität 60

§ 2. Die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$. Ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Die Transformationen der Gleichungen in sich 65

§ 3. Werte der Wurzeln x_{10}^{i} in den Ecken des Fundamental-Polygons 71

§ 4. Form der Coefficienten. Aufstellung der Gleichungen . . . 72

§ 5. Beispiele. $n = 3, 5, 7$ 78

Schlussbemerkungen über den Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ für $s = 5$ mit der Icosaeder-Irrationalität 80

Vita.

Ich, Paul Friedrich Biedermann, evangelisch-lutherischer Confession, bin am 5. November 1862 zu Zittau geboren. Nach dem Vorcursus auf der Bürgerschule besuchte ich von Ostern 1873 bis Ostern 1881 die damalige Realschule I. O. daselbst. Mit dem Zeugnis der Reife verliess ich diese Anstalt, um in Leipzig Mathematik, Physik und Philosophie zu studieren.

Hierselbst hörte ich die Vorlesungen der Herren Professoren und Docenten Dyck, Hankel, Hofmann, Klein, Masius, Maurenbrecher, Mayer, von der Mühll, Neumann, von Noorden, Rohn, Scheibner, Schur, G. Wiedemann, Wundt und nahm teil an den Uebungen resp. Seminaren der Herren Professoren Hankel, Hofmann, Klein, von der Mühll, Scheibner, Wundt. Ich sage hiermit allen den genannten Herren meinen herzlichen Dank. In ganz besonderer Weise bin ich dazu Herrn Professor Dr. Klein verpflichtet; in dem Seminare dieses edlen Mannes habe ich eine mir unschätzbare Förderung und Anregung erfahren.

In diesem Winter-Semester habe ich mich vor hiesiger Kgl. Prüfungscommission dem Examen pro facultate docendi in der mathematisch-physicalischen Abteilung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section unterzogen und bin nunmehr zur Ableistung meines Probejahres von Ostern 1886 ab dem Annen-Realgymnasium zu Dresden zugewiesen.

Leipzig, Anfang März 1886.